**Le produit scalaire** Terminale S

**I – Rappels sur le produit scalaire dans le plan**

1. **Différentes expressions du produit scalaire**

Définition 1: Soient  et  deux vecteurs du plan.

* + Si l’un des vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.
  + Si ces deux vecteurs sont non nuls, le produit scalaire de  et  est le réel :

****,

Pour  étant deux représentants respectifs de  et , on obtient : 

Remarques : Ce produit scalaire est indépendant des représentants. On peut donc choisir des représentants de même origine.

Si  et  sont deux **vecteurs colinéaires et de même sens**, alors : , c’est-à-dire .

Si  et  sont deux **vecteurs colinéaires de sens contraire**, alors : , c’est-à-dire 

Définition 2 : Dans un repère orthonormé, si  et  ont respectivement pour coordonnées (x ; y) et (x’ ; y’), alors .

Définition 3 : Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), on a :

.

Définition 4 : 

1. **Propriétés :**

**** est noté et est appelé **carré scalaire** de .

On a  donc .

Soient 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

** vecteurs non nuls, sont orthogonaux si, et seulement si, **

1. **Applications à la géométrie**

* Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB], alors, pour tout point M du plan,  (Théorème de la médiane).
* Soient ABC un triangle et a, b et c les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB], alors : **.** (cette formule porte le nom de **Al Kashi**)

On obtient deux autres formules par permutation circulaire des lettres.

1. **Équations de droites dans un plan**

Définition : Un vecteur normal d’une droite est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

Propriétés : Si  est un vecteur normal de la droite (d), alors une équation de (d) s’écrit sous la forme a*x* + b*y* + c = 0 . (rappel : un vecteur directeur de (d) a pour coordonnées (-b ; a) )

Réciproquement, si a et b sont deux réels non nuls, l’équation a*x* + b*y* + c = 0 est l’équation d’une droite dont le vecteur de coordonnées (a ; b) est un vecteur normal.

Applications : équations de perpendiculaires, hauteur, médiatrices, tangentes à un cercle.

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé, on donne les points : A(1 ; 3) ; B(2 ; 5 ) et C (-1 ; 4). Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A ; Déterminer une équation de la médiatrice de [BC].

**II -Vecteurs dans l’espace**

L’espace est repéré par . Le vecteur **** a pour coordonnées (*x* ; *y* ; *z*) signifie que .

Exercice 2 : on considère un cube ABCDEFGH. Quels sont les coordonnées des points A, B, C, E, F et H dans le repère  ?

Propriété : Trois vecteurs non nuls de l’espace ,  et **** sont **coplanaires** si et seulement si l’un des vecteurs s’exprime comme combinaison linéaire des deux autres.

Par exemple s’il existe deux réels *a* et *b* tels que **=** *a* + *b*

Remarque : 3 vecteurs non coplanaires de l’espace forment un repère.

Propriété : Quatre points A, B, C et D de l’espace sont coplanaires si et seulement si les vecteurs sont coplanaires, ou si et seulement si deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 3 : Tracer un tétraèdre ABCD, avec I milieu de [AB] , J milieu de [BC], K milieu de [CD], E tel que  et L tel que . Démontrer que les quatre points I, J, K et L sont coplanaires.

**III – Produit scalaire dans l’espace**

1. **Définition**

**Soient  et  deux vecteurs non nuls de l’espace. A, B et C trois points de l’espace vérifiant et **

**Il existe au moins un plan (P) contenant les trois points A, B et C.**

**Le produit scalaire des deux vecteurs  et  de l’espace est le produit scalaire des deux vecteurs  et  , calculé dans le plan (P).**

Remarque : On admet que le produit scalaire est indépendant du choix des représentants des deux vecteurs et du choix du plan.

1. **Expressions du produit scalaire**

|  |  |
| --- | --- |
| Normes et angles | Projection orthogonale |
| Si  et  sont non nuls (P)  A  A    AAaAAA  B  H  C  B  C      où | **Si st non nul**    A  ,  où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) |

**Expression analytique** : Soient et deux vecteurs dans l’espace muni d’un repère orthonormé. 

1. **Règles de calcul** (admises)

* Pour tous vecteurs ,  et **** de l’espace, et tout réel k :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

* + Par définition, deux vecteurs **** et ****, non nuls, sont orthogonaux si, et seulement si, .

Exercice 4 : les vecteurs  et  sont-ils orthogonaux ?

1. **Orthogonalité dans l’espace**

**Droites orthogonales**

Deux droites (D) et (D’) de vecteurs directeurs respectifs ** et  s**ont orthogonales si, et seulement si, 

**Droite et plan perpendiculaires**

Une droite (D) de vecteur directeur et un plan (P) de base sont perpendiculaires (ou orthogonaux) si, et seulement si, et .

1. **vecteur normal**

Définition: un vecteur directeur d’une droite perpendiculaire au plan (P) est appelé

**vecteur normal** à (P). 

M

A

Soit A un point de l’espace et  un vecteur non nul.

L’ensemble des points M de l’espace tel que  est le plan

passant par A et de vecteur normal .

Exemple**:** Soit [AB] un segment de milieu I. L’ensemble des points M de l’espace équidistants des points A et B est le plan médiateur du segment [AB] : c’est le plan passant par I et de vecteur normal .

1. **Équation cartésienne d’un plan dans l'espace**

Dans un repère orthonormé, tout plan admet une équation de la forme a*x* + b*y* + c*z* + d = 0 , où a, b, c et d sont des réels tels que a, b et c ne sont pas tous nuls.

**Le vecteur**  **est un vecteur normal à ce plan.**

Réciproquement : Soient a, b, c et d quatre réels tels que a, b et c ne sont pas tous nuls.

Dans un repère orthonormé, l’ensemble (E) des points M (*x* ; *y* ; *z* ) de l’espace vérifiant a*x* + b*y* + c*z* + d = 0 est un plan de vecteur normal 

Exercice 5 : L’espace est muni d’un repère orthonormé . Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A ( -2 ; 1 ; 3) et orthogonal à (BC) avec B(1 ; -2 ; 2 ) et C(4 ;1 ;-1).

Exercice 6 : Déterminer l’équation du plan médiateur à [AB] avec A(-1 ; 2 ; 3) et B(-2 ; 3 ; 1).

Exercice 7 : Soient A, B et C trois points distincts de l’espace, déterminer le lieu des points M de l’espace tels que a) 

b) 

c) 

Exercice 8 : Dans l’espace, on considère les trois points A(3 ; 2 ; 4) ; B(-6 ; 2 ; 1) et C(-7 ; 1 ; 0 ).

1. Montrer que les points A, B et C forment un plan de l’espace.
2. Déterminer l’équation du plan (ABC). ( 2 méthodes)
3. Soit le point E (3 ; 2 ; 1). Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de E sur le plan (ABC).

**IV – Distance d'un point à une droite, à un plan**

* 1. Définition : Soient (d) une droite du plan et A un point quelconque du plan. On appelle **distance du point A à la droite (d**) la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (d).

Propriété : *Le plan est rapporté à un repère orthonormé.*

Soient (d) une droite d’équation a*x*+ b*y* + c = 0 avec a et b deux réels non nuls et A (*x*A ; *y*A) un point du plan. La distance du point A à la droite (d) est égale à .

Exercice 9 : Dans un repère orthonormé, on donne la droite (d) d’équation 3x- 4y + 7 =0 et le

point A (-2 ; 1). Déterminer la distance de A à la droite (d).

* 1. **Distance d’un point à un plan**

Soient M un point de l’espace, un vecteur non nul et (P) le plan passant par M et de vecteur normal.

Pour un point quelconque A de l’espace dont on note H le projeté orthogonal sur le plan (P), la distance AH est égale à : AH = 

Dans un repère orthonormal ; soient (P) le plan d’équation a*x* + b*y* + c*z* + d = 0 et **** un point de l’espace. la distance de A à (P) est égale à .

Exercice 10 : Calculer la distance du point A (5 ; 2 ; -3) au plan (P) d’équation : *x* + 4*y* + 8*z* + 2 = 0.

**V – Cercle et sphère**

1. **équations de cercles dans le plan** : Le plan est rapporté à un repère orthonormal :

Le **cercle** de centre I (a ; b) et de rayon R est l’ensemble des points M(x ; y) tels que : . Une équation de ce cercle est .

Le **cercle** de diamètre [AB] est l’ensemble des points M du plan tels que :.

1. **Sphère dans un repère orthonormé** 

Définition : La **sphère** de centre I (a ; b ; c) et de rayon R est l’ensemble des points M(x ; y ; z) de l’espace tels que : .

Propriétés :Une équation de la **sphère** de centre I (a ; b ; c) et de rayon R est : .

La sphère de diamètre [AB] est l’ensemble des points M (*x* ; *y* ; *z*) de l’espace tels que : .

Exercice 11 : Soit  un repère orthonormé de l’espace.

Démontrer que l’ensemble des points M (*x* ; *y* ; *z*) dont les coordonnées vérifient l’équation

*x*2 + *y*2 + *z*2 - 2*x* + 4*y* +2 = 0 est une sphère, dont on déterminera le centre I et le rayon.

Le plan (P) d’équation *x* -2*y* +2*z* +1 = 0 est-il sécant à cette sphère ?

**VI - Inéquation caractérisant un demi-espace**

Définition : L’ensemble des points M (*x* ; *y* ; *z*) qui vérifient a*x* + b*y* + c*z* + d  0 est un **demi-espace** délimité par le plan (P) d’équation a*x* + b*y* + c*z* + d = 0, frontière comprise.

L’autre demi-espace de même frontière (P), frontière comprise, est l’ensemble des points M (*x* ; *y* ; *z*) qui vérifient a*x* + b*y* + c*z* + d  0.

Exercice 12 : Dans un repère orthonormé  de l’espace, on donne :

A (1 ; 1 ; 1) et B (3 ; -1 ; -3).

Déterminer une équation du plan médiateur du segment [AB].

Déterminer l’inéquation du demi-espace de frontière le plan médiateur de [AB] et contenant le point B, frontière comprise.