Nombres complexes 2ème partie

**II] Forme trigonométrique**

1. Module d'un nombre complexe

• Si le point M est l'image du complexe z = a + bi ( a ∈ IR , b ∈ IR) dans le plan complexe , on appelle module de z, noté  , la distance OM

 = OM =  ou = 

* Propriétés : |*z*| = 0 ⇔ *z* = 0 ; |- *z*| = |*z*| ; |*z* + *z*'| ≤ |*z*| + |*z*'|

**|*zz*'| = |*z*|.|*z*'|** ; = n ; 

Pour z' non nul :  et ****

Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors OM = |z| et MM' = |z' - z|

Si  a pour affixe z, alors = |z|.

Exercice 1 : Résoudre dans , l’équation : 

Exercice 2 : Déterminer l’ensemble des points M (d’affixe z) du plan complexe tels que

a)  b) 

2. Argument d'un nombre complexe

* Définition : **Un argument** du nombre complexe z **non nul** est une mesure de l'angle polaire du point M dans le plan complexe muni du repère, c'est à dire une mesure  de l'angle orienté.

Le réel 0 n'a pas d'argument. Le nombre complexe i a pour module 1 et pour argument .

* Propriétés :

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.

Si θ est un argument de z, on notera arg z = θ π ou arg z = θ + 2kπ (k ∈ ZZ )

On appelle **argument principal de z** l'argument de z appartenant à ]- ; ].

Tout réel positif a un argument égal à 0.

Tout réel négatif a un argument égal à .

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à  et tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à -.

Exercice 3 : Déterminer l’ensemble des points M (d’affixe z) du plan complexe tels que

a) arg(z+2i) = π + 2kπ (k ∈ ZZ ) b) arg(z-1) =  (k ∈ ZZ )

Pour z CI \* et z'  CI \*, on a z = z' ⇔ 

Soit z nombre complexe non nul : z = a + bi ,  et arg z = θ + 2kπ (k ∈ ZZ )

alors  équivaut à 

z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

• **arg(zz') = arg z + arg z'** + 2kπ (k ∈ ZZ ) (**ROC)** ; arg  = - arg z + 2kπ (k ∈ ZZ )

• **arg  = arg z - arg z'** + 2kπ (k ∈ ZZ ) ; Pour n entier : arg (zn) = n arg z + 2kπ (k ∈ ZZ )

• arg () = - arg z + 2kπ (k ∈ ZZ ) ; arg (- z) = arg z + π + 2kπ (k ∈ ZZ )

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

***z* = r (cos θ + i sin θ)**

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

avec θ ∈ IR et r ∈ IR

C'est la **forme trigonométrique** de *z*.

r est le module de z, r = |z|

θ est un argument de z. On note aussi z = [ |z| ; θ ]

Si z = r (cos θ + i sin θ) alors Re(*z*) = r cos θ et Im(z) = r sin θ.

= r (cos(-θ) + i sin(-θ)) ; - z = r (cos(θ + π) + i sin(θ + π)) ; et 

Exercice 4 : Déterminer la forme trigonométrique de  ;  et 

4. Utilisation en géométrie

**La notion de distance correspond au module - La notion d'angle à l'argument.**

A, B , C et D étant quatre points distincts d'affixes zA, zB , zC et zD dans  , alors :

• le vecteur  a pour affixe zB - zA ,

• **AB = **

• **l'angle**  a pour mesure arg(zB - zA) [2]

• **l'angle **a pour mesure arg(zD - zC) - arg(zB - zA) = 

Exercice 5 : On considère les points A, B et C d’affixes respectives -1+2i ; 4-3i et 3i. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 6 : On considère les points A, B et C d’affixes respectives i ; 2+i et . Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

• **Comment démontrer que trois points A, B et C sont alignés** :

⇔ est un nombre réel ⇔ l'angle **** est nul

⇔ = 0 + kπ (k ∈ ZZ )

• **Comment démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales** :

⇔  est un imaginaire pur

⇔ **l'angle **a pour mesure  ou - ⇔ = + kπ (k ∈ ZZ )