TermS

# Limites de suites et de fonctions

## I ] Suites

### 1) Définition : Une suite réelle est une fonction de dans , définie à partir d'un certain rang n0.

Notation : un = lire "u indice n" = terme d'indice, ou de rang n = terme général de la suite u.

= (un) = u = suite

Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang, comme par exemple :

un = 1/n définie pour *n ∈*  vn= définie pour n 3

Notons que le domaine de définition est nécessairement du type [ n0 ; + ** [ avec n0 *∈*

Une suite peut être définie explicitement par une fonction (exemple un = *f*(n) = n²+2n+3) , ou par récurrence un+1 = *f* (un) .

2) Démonstration par récurrence :

Soit une propriété définie sur (ou un intervalle *I* de ). Si :

La propriété est **INITIALISÉE** à un certain rang *n*0 (C'est-à-dire : (*n*0) est vraie)

La propriété est **HÉRÉDITAIRE** à partir du rang *n*0

(C'est-à-dire : pour tout *n n*0, (*n*) (*n* 1))

Alors : La propriété est vraie à tout rang plus grand que *n*0.

Exercice 1 : Montrer par récurrence que 

3) Sens de variation (monotonie) d'une suite

**Définitions** : Soit (un) une suite de nombres réels. On dit que :

· La suite (un) est **croissante** (à partir du rang n0) lorsque un un+1 pour tout entier *n*  n0.

· La suite (un) est **strictement croissante** (à partir du rang n0) lorsque un< un+1 pour tout entier *n* n0.

· La suite (un) est **décroissante** (à partir du rang n0) lorsque un un+1 pour tout entier *n* n0.

· La suite (un) est **strictement décroissante** (à partir du rang n0) lorsque un> un+1 pour tout entier *n* n0.

· La suite (un) est **monotone** (à partir du rang n0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n0.

· La suite (un) est **stationnaire** s'il existe un entier n0 tel que un= un+1 pour tout entier *n* n0.

· La suite (un) est **constante** lorsque un= un+1 pour tout entier *n* du domaine de définition de (un).

**Méthodes: - On peut comparer directement  et  grâce aux propriétés des inégalités.**

**- On peut étudier le signe de la différence  .**

**- Si la suite u est définie au moyen d’une fonction f par un = f(n), on peut étudier les variations de la fonction f.**

**- Si tous les termes de la suite u sont strictement positifs, on peut comparer à 1 le quotient  .**

**- Si la suite est définie par récurrence, un+1 = f (un) on peut utiliser une démonstration par récurrence.**

Exercice 2 : Etudier le sens de variations des suites : un = 2n + sin(n) , vn =  pour n 1

4) Suite majorée, minorée, bornée

**Définitions** : Une suite  est dite **majorée** s'il existe un réel M , appelé **majorant** de la suite, tel que, pour tout entier naturel n, on a un  M.

La suite est dite **minorée** s'il existe un réel *m*, appelé **minorant** de la suite, tel que, pour tout entier naturel n, on a un  *m*.

Une suite à la fois majorée et minorée, est dite **bornée**.

**Méthodes** : - manipulation d'inégalités

- Si la suite u est définie au moyen d’une fonction *f* par un = *f*(n), on peut étudier les variations de la fonction *f*.

- Par récurrence.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que la suite définie par un+1 =  et u0 = 0 est bornée par 0 et 3.

## II ] Limites de suites

**Définition suite convergente:** Soit  une suite réelle et l un réel. On dit que la suite  admet (ou a) l pour limite , ou encore **converge** (ou tend) vers l , si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.  = l

Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite **divergente**. ( + **  ; - ** ; ou pas de limite)

### Définition Suite divergente vers + **

On dit qu'une suite diverge vers + ** lorsque : tout intervalle ouvert du type ]*A*, + **[ (où *A* réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

### Définition Suite divergente vers - **

On dit qu'une suite diverge vers - ** lorsque : tout intervalle ouvert du type ]- **[ (où B réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemples de référence (admis) :  ;  ;  ; 

Les suites sin(n) et cos(n) divergent.

Propriété admise : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle [a ; + [ où a  et (un) la suite définie par **un = *f*(n).**

Si  alors 

Si  alors 

Si  alors 

Propriété (ROC ) : Si u est une suite croissante, non majorée, alors u diverge vers + ** .

De même : Si u est une suite décroissante, non minorée, alors u diverge vers - ** .

Exercice 4 : Etudier la convergence de la suite un = n² -3n – 1

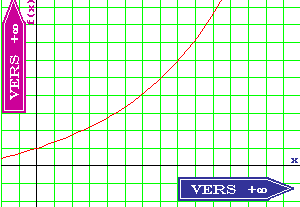
Exercice 5 : Soit v la suite définie par vn = 1 + 1/n . A partir de quel rang a-t-on vn ∈ ]0,99 ; 1,01[ . Que peut -on en déduire?

## III ] Limites de fonctions

Soit *f* une fonction numérique définie sur Df, de courbe représentative Cf dans un repère.

1) Limites en l’infini

### a) Limite infinie

Par exemple, considérons la fonction f dont la courbe représentative est ci-contre :

Lorsque ***x***s'en va vers **+**., ***f(x)*** devient de plus en plus grand. il n'a aucun maximum. On dit alors que ***f(x)*** tend vers **+**.   
Ou que la **limite** de la fonction ***f*** lorsque ***x*** tend vers **+**est égale à **+**

Ce que l'on résume par : 

**Définition** : Si pour tout réel A positif, il existe un réel B tel que pour tout x > B on a *f(x*)> A alors on dit que *f(x)* tend vers **+** quand *x* tend vers **+**.

Exercice 6 : On considère la fonction *f* définie sur [3 ; + ∞ [ par . En utilisant la définition, démontrer que la fonction *f* a pour limite + ∞ en + ∞.

**Propriété** : La droite (d) d'équation *y* = a*x* + b est une **asymptote oblique** à la courbe représentative Cf de la fonction *f* au voisinage de **+** si et seulement si 

Définition et propriété équivalentes pour une limite en -****.

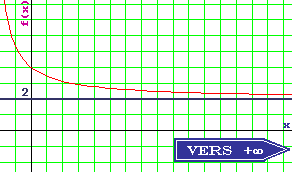
Remarque : On étudie la position de la courbe Cf par rapport à la droite (d) en étudiant le signe de

*f(x)* – (a*x*+b). On pourra faire un tableau de signes.

Exercice 7 : On considère la fonction *f* définie sur  par .Déterminer l’équation de son asymptote oblique.

### b) Limite finie

Considérons maintenant la fonction ***f*** dont la courbe représentative est ci-dessous :

Lorsque ***x*** s'en va vers **+**, ***f(x)*** se rapproche de plus en plus de **2**.   
On dit alors que ***f(x)*** tend vers **2**, ou que la **limite** de la fonction ***f***lorsque ***x*** tend vers **+** est égale à **2**.

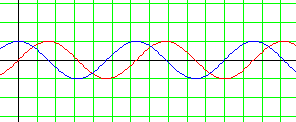
Ce que l'on résume par : 

**Définition** : On dit que *f(x)* tend vers un réel *l* lorsque *x* tend vers **+,** si tout intervalle ouvert contenant *l* contient tous les réels *f(x)* pour *x* assez grand.

**Propriété** : La droite (d) d'équation *y* = b est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative Cf de la fonction *f* au voisinage de **+** si et seulement si 

Définition et propriété équivalentes pour une limite en -****.

### c) Sans limite ! Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque *x* tend vers +. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque ***x*** s'en va vers **+**, **sinus** et **cosinus** hésitent quant à l'attitude à adopter. Oscillant à jamais, ils n'ont aucune limite finie ou infinie...

2) Limites en un point

**Propriété** : Pour tout réel *a* et pour toute fonction *f* définie en *a* , si *f* admet une limite en *a* alors elle est unique et égale à *f(a)*. 

**Limite finie** : Dire que *f* admet une limite *L* en *a* , c'est dire que *f(x)* peut être rendu aussi proche que l'on veut de *L* à condition que *x* soit suffisamment proche de *a* .

**Définition** : *f* admet pour limite *L* en *a* si pour tout intervalle I ouvert contenant *L*, il existe un intervalle ouvert J contenant *a* tel que I contient tous les f*(x)* pour *x* appartenant à J et à Df .

Limite infinie :

Par exemple, considérons la fonction *f* définie sur l'intervalle **** dont la courbe représentative est ci-contre

Lorsque ***x*** se rapproche de **3**, ***f(x)*** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête. On dit alors que ***f(x)*** tend vers **+**.   
Ou que la **limite** de la fonction ***f*** lorsque ***x*** tend vers **3** est égale à **+**  
Ce que l'on résume par : 

Définition : Dire que *f* tend vers **+**quand *x* tend vers *a* , c'est dire que *f(x)* peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition que *x* soit suffisamment proche de *a*. Notation 

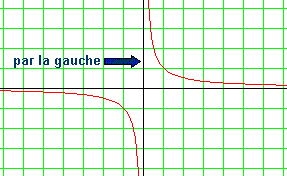
**Propriété** : La droite (d) d'équation *x = a* est une **asymptote verticale** à la courbe représentative Cf de la fonction *f* si et seulement si 

Exercice 8 : Déterminer les limites en -1 de 

Limite à gauche et limite à droite.

Exemple : Dans ce qui suit, *f* désignera la fonction définie sur l'intervalle ] -****; 2 [ ] 2 ; + ****[ par *f(x)* = 

On a alors :  et 



#### Par la droite

La fonction *f* n'admet pas de limite en 2.

**Propriété admise** : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle contenant *a*, mais qui n'est pas définie en *a*, alors, ***f* possède une limite en *a* si et seulement si elle possède une limite finie à gauche et une limite finie à droite et si celles ci sont égales.**

3) Limites des fonctions de référence

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Fonction | Ensemble de définition | Limite en - | Limite en 0 | Limite en + |
| x | ] – ; +[ | –  | 0 | + |
| *x*2 | ] – ; +[ | +  | 0 | + |
| *x*3 | ] – ; +[ | –  | 0 | + |
|  | ] – ; 0 [  ] 0 ; +[ | 0 |  | 0 |
|  | [ 0 ; +[ | N'existe pas | 0 | + |
| sin(*x*) cos(*x*) | ] – ; + [ | N'existe pas | 0  1 | N'existe pas |

4) Opérations sur les limites

### Limite d’une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Limite de *f* | Limite de *g* | Limite de *f + g* |
| L | L' | L + L' |
| L | + | + |
| L | - | - |
| + | + | + |
| - | - | - |
| **+** | **-** | **Indéterminé** |

### Limite d'un produit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Limite de *f* | Limite de *g* | Limite de *f x g* |
| L | L' | L x L' |
| L |  | (signe à voir) |
|  |  | (signe à voir) |
| **0** |  | **Indéterminé** |

### Limite d'un quotient

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Limite de *f* | Limite de *g* | Limite de *f / g* |
| L | L' | L / L' |
| L |  | 0 |
|  | L | (signe à voir) |
|  |  | **Indéterminé** |
| 1 | 0 |  |
|  | 0 | (signe à voir) |
| **0** | **0** | **Indéterminé** |

**Les 4 formes indéterminées à retenir sont :**

**+  ; 0 ×**

**;**

### Limite de la composée de deux fonctions.

### propriété  (admise):

Soient *f* et *g* deux fonctions. *a, L* et *L*’ trois réels ou éventuellement égaux à +/–

Si 

Exemple : car  et 



Exercice 9 : Calculer 

**Limite de la composée d'une suite et d'une fonction.**

**propriétés  (admises):**

Lorsque  converge vers un réel *l* , si la fonction *f* est continue en *l* , alors la suite  converge vers *f (l )* .

Lorsque converge vers un réel *L*, si , alors la suite  diverge vers + .

Lorsque  diverge vers +  , si , alors la suite  converge vers *L* et si  alors  diverge vers + .

Exercice 10 : Déterminer la limite de la suite vn = cos( + )

### Théorème des gendarmes. (ROC) A démontrer

Soient *f, g* et *h* trois fonctions et *L* un réel. Si pour tout *x* appartenant à un intervalle du type  on a *f(x)*  *g(x)*  *h(x)* et si  alors 

Conséquences : Si  et si pour *x* assez grand on a *f(x)*  *g(x)* alors 

Si  et si pour *x* assez grand on a *g(x)* *h(x)* alors 

Conséquences analogues pour des limites en un point ou en - *.*

Exercice 11  : Etudier les limites en + ** et – **  de la fonction *f* définie par *f(x)* = 

Théorème équivalent pour les suites.