**Les fonctions logarithmes** Terminale S

Le mot **Logarithme** vient du grec ***logos*** : raison ou proportion et de ***arithmos*** : nombre. Il a été utilisé pour la première fois dans un livre de John Napier en 1614 (*Description des merveilleuses règles des Logarithmes*).

**I ] La fonction logarithme népérien**

La fonction exponentielle est une fonction continue sur , strictement croissante, elle prend ses valeurs dans ]0 ; + [. Donc, pour tout *m* appartenant à ]0 ; + [ , le théorème de la valeur intermédiaire s’applique : Pour tout *m* appartenant à \* , il existe un unique réel α tel que : eα  = *m*

On note α = *ln* (*m*). On dit que α est le logarithme népérien de *m*.

1. **Définition et propriété:** Soit *a* un nombre réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de *a* ( noté *ln*(*a*) ou *ln a*) l'unique réel solution de l'équation *exp*(*x*)=*a*.

**Définition :** On appelle fonction logarithme népérien, la fonction noté *ln*, qui a tout réel de  associe le nombre *ln*(*x*).

Conséquences : *ln*(1) = 0 ; *ln* *e* = 1

Pour tout *x* réel > 0, et pour tout réel *y* on a : **** Et 

Les fonctions *exp* et *ln* sont des bijections réciproques. Alors les graphes des fonctions *exp* et *ln* sont symétriques par rapport à la droite d'équation *y = x* .

Exercice 1 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions *f(x) = ln(3x-5)* + *ln(2x+ 3)*  et

*g(x) = ln(6x²-x-15)*

1. **Propriété** : La fonction *ln* est dérivable sur  est sa dérivée est *1/x*. (donc la fonction *ln* est continue sur .
2. **Relation fonctionnelle et conséquences** : Pour tout *a* et *b* de , et pour tout n de  :

**ROC**: ***ln (ab) = ln a + ln b*** alors *ln* = *- ln b*  ; ; *ln ( an) = n (ln a)* ;

*ln ()* = (1/2) *ln a*

Exercice 2 : Les fonctions *f* et *g* de l’exercice 1 sont-elles égales ?

Exercice 3 : Ecrire *ln*(32) + *ln(*8) en fonction de *ln*(2).

1. **Etude de la courbe** : *f(x) = ln x* ; Df = 

Dérivée et variation :*f ' (x) = 1/x* > 0 donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante de  sur  donc pour **0 < *x* < 1 *ln x* < 0 et pour *x* > 1 *ln x* > 0** , et pour *a* et *b* nombres strictement positifs *a = b ln a = ln b et a < b  ln a < ln b*

Etude des limites:  ;  donc la droite d'équation *x* = 0 est asymptote à la courbe.

De plus  ;  ;

**Tableau de variation** **Allure de la courbe**

|  |  |
| --- | --- |
| tableauLN | courbeLN |

1. **Fonction composée** : Soit *u* une fonction positive sur un intervalle I alors

***(ln u) '*** *= * et le signe de *(ln(u(x)) '* est celui de *u ' (x).* ( car *u(x*) >0)

Exemple : *( ln ( 3x-5) )' = * sur l'intervalle 

Application :  donc pour h proche de 0 , on a ln(1+h) ≈ h (approximation affine de *ln* en 1)

Exercice 4 : déterminer la dérivée de la fonction *h(x) = ln(e2x + 1)*

1. **Résolution d'équations ou d'inéquations avec des ln :**
   1. Rechercher l'ensemble de définition D de l'équation . ( si on a *ln (u(x))* ,il faut que *u(x)* > 0)
   2. Transformer l'équation ou l'inéquation pour obtenir  *ln (u(x)) = ln(v(x))* ou < 0 ou > 0.
   3. Résoudre l'équation ou inéquation *u(x)=v(x)* ou *u(x) < v(x)* ou *u(x) > v(x)*
   4. Parmi les réponses trouvées, conserver les solutions appartenant à D .

Exercice 5 : Résoudre dans  : *ln(x+5) + ln(x-2) = ln 8* et  *ln(x-3) – ln(x-1) < 2 ln 3*

1. **Résolution d'équations ou d'inéquations avec des (ln x)² ou (ln x)3 ….. :**
   1. Rechercher l'ensemble de définition D de l'équation . ( si on a *ln (u(x))* ,il faut que *u(x)* > 0 )
   2. Poser le changement de variable X = *ln (u(x))*
   3. Résoudre l'équation ou inéquation avec les X.
   4. En déduire les solutions pour *x* , appartenant à D .

Exercice 6 : Résoudre dans  : (*lnx*)3 – 2 (*lnx*)² - 5 *lnx* + 6 = 0

**II ] Les autres fonctions Logarithmes**

1. **Définition 2** : Pour tout réel *a* strictement positif et différent de 1, on appelle ***logarithme de base a*** la fonction  *loga* définie pour tout *x* strictement positif par : 

Remarques: on a alors *loga(a)* = 1 et *loga*(1) = 0 ; le logarithme de base e est le logarithme népérien.

Propriétés : pour tout *x* > 0 :  donc 

Pour tout *x* > 0 et *y* > 0 

1. **Définition 3** : On appelle ***fonction logarithme décimal***, la fonction notée *log*  définie sur  par : .

Propriétés *: log*(10) = 1 , *log* 1 = 0 ; la fonction *log* est définie , dérivable et strictement croissante sur  ( car *ln*(10) > 0).

Pour *a*, *b* réels strictement positifs et p entier quelconque on a :

*log(ab) = log(a) + log(b) ;*

*log (ap ) = p log(a) ; log (10p) = p*