Term S

# Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

## I ] Continuité

1. Définition : Soit une fonction numérique *f* et *a* un réel. On dit que *f* est continue en *a* si  et si . ou 

**Définition :** Soit une fonction numérique *f* définie sur un intervalle I, on dit que ***f* est continue sur I** si *f* est continue en tout point *a* de I.

Graphiquement, cela signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon.

1. Propriétés (admises):

Toute fonction polynôme (à coefficients réels) est continue sur .

Toute fonction rationnelle (à coefficiens réels) est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur .

La fonction racine carrée est continue sur .

1. Opérations :

Si *u* et *v* sont continues sur I, alors *u* + *v*, k*u* avec k réel , *u* × *v* et *u*n (*n* entier naturel non nul) sont continues sur I.  est continue sur les intervalles où elle est définie.

Si la fonction *f* est continue en *a* et si la fonction *g* est continue en *f*(*a*) alors la fonction *g* o *f* est continue en *a*.

Exercice 1 : justifier que la fonction x  est continue sur et étudier la continuité de la fonction x 

1. Contre exemple : La fonction Partie Entière

La fonction partie entière, notée E est définie pour tout *x*  par **:E(*x*) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à *x*.**

Par conséquent, si *x* désigne un réel et n un entier relatif, E(*x*) = n si et seulement si n *x* <n+1

Exemples : •E(4) = 4

•E(6, 2) = 6

•E( -2) = -2

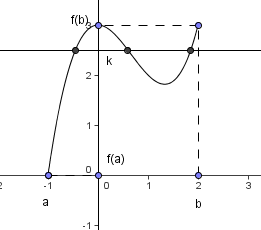
•E( -4, 3) = -5

Exprimer E( ** ) ; E(x) pour x ∈ [0;1[ ; [1;2[ ; [-1;0[

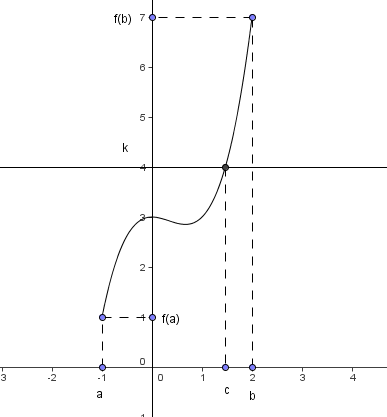
Tracer la courbe de la fonction partie entière sur [-3;3[

La fonction partie entière n'est pas continue en 1 mais est continue sur .

Exercice 2 : Activité 1 page 48 (hyperbole)

II ] Théorème des Valeurs Intermédiaires : (admis)

1) TVI **:** Si la fonction *f* est définie et **continue** sur un intervalle I, si *a* et *b* sont deux valeurs de I et ***k* un réel compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*)** , alors **il existe au moins** un réel *c* tel que *f*(*c*) = *k*.

2) Corollaire du TVI, Théorème de la bijection : (**ROC**) à démontrer

Si la fonction *f* est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle [*a* ; *b*], alors pour tout réel ***k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*)**, l'équation ***f*(*x*) = *k* admet une solution unique** dans [*a* ; *b*]. On dit que *f* réalise une **bijection** de [*a* ; *b*] sur [*f*(*a*) ; *f*(*b*)] ou [*f*(*b*) ; *f*(*a*)] selon que *f* est croissante ou décroissante.

Cas particulier : Si *f* réalise une bijection (donc toutes les conditions précédentes) et que ***f*(*a*)*f*(*b*) < 0**, alors l'équation *f*(*x*) = 0 a une solution et une seule dans I.

Attention: le Théorème de bijection prouve l'unicité de solutions.

Application : Pour obtenir des valeurs approchées ou des encadrements de ces solutions, plusieurs méthodes sont possibles : par balayage (tableur) ou par dichotomie .

Exercice 3:

Déterminer le nombre de solutions de l'équation : *x*5+2*x*–1 = 0 et donner une valeur approchée à 0.1 près des solutions .

Exercice 4 : Déterminer le nombre de solutions de l’équation *x* = 2 cos(*x*) sur .On montrera que les solutions ne peuvent appartenir qu’à [-2 ; 2 ] puis on donnera un encadrement des solutions éventuelles d’amplitude 10–2

Utiliser la calculatrice pour déterminer un encadrement à 10–2 près de la solution.

3) Bijection réciproque : (hors programme)

**Définition** : Soit A et B deux ensembles quelconque et f une fonction numérique définie sur A et à valeurs dans B. On dit que ***f* est une bijection de A sur B si pour tout *y* de B , il existe un unique *x* de A tel que *f(x) = y.***

(tout élément de B admet un unique antécédent dans A)

La fonction qui a *y* de B associe son unique antécédent *x* de A est appelée **bijection réciproque** de *f* et est notée *f* -1. *y = f (x)  x= f –1 (y)*

**Théorème** (admis) : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur J = *f(* I) . La bijection réciproque *f* –1 est aussi continue sur J et est monotone et de même sens de variation que *f* .

Les courbes Cf et Cf-1 sont symétriques par rapport à la droite d'équation *y* = *x* dans un repère orthonormé.