**Calcul intégral**  Terminale S

**I ] Aire et intégrale**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Définition 1:** A toute fonction *f* positive ou nulle (en abrégé **positive**) définie sur un intervalle [a ; b ] avec a<b , de courbe représentative C dans un repère orthogonal , on associe l'ensemble Af des points M du plan dont les coordonnées (*x;y*) vérifient  et , c'est à dire la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations *x* = a et *x* = b. | b  a  (C)  O  x    y  Unité d'aire |

**Définition 2 :** Pour toute **fonction *f* positive et continue** sur [a ; b ] avec a < b , on appelle **intégrale de *f* sur [a ; b ]**  et l'on note , l'aire de Af.

Remarques

• On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

* si *f* est négative sur [a ; b ] alors  est égal à l'opposé de l'aire de Af .

Af = − 

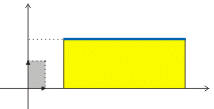
•  se lit : "intégrale ou somme de a à b de *f*(*x*) dx".

• La variable *x* est appelée variable "muette".

On peut remplacer *x* par n'importe quel autre variable :  = =.

• L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs   et   : Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe Ox et 3 cm sur l'axe Oy, alors l'unité d'aire est 6 cm2.

Exemple



b

a

O

x

y

k

Si *f* est une fonction constante positive k, alors

 correspond à l'aire d'un rectangle,

On a k d*x* = k(b - a).

Exercice 1 : Calculer    et 

1. **Propriétés de l'intégrale** :
   1. Toute fonction continue sur [a ; b ] admet une intégrale sur cet intervalle.
   2. **Relation de Chasles** Soit une fonction, *f*, continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a, b et c de I, on a : =  + 
   3.  = 0 ;  = - 
   4. **Linéarité**: Soit deux fonctions, *f* et *g*, continues sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I, on a :  où  et  sont des réels.
   5. **Positivité de l'intégrale** : Soit une fonction *f* continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que **a ≤ b**. Si *f*  ≥ 0 sur [a ; b], alors :  ≥ 0.
   6. **Respect de l'ordre par intégration**. Soient deux fonctions, *f* et *g*, continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que **a ≤ b**. Si *f* ≤ *g* sur I, alors :  ≤ .
   7. **Inégalité de la moyenne :** Sur un intervalle [a, b] avec a < b, la fonction est comprise entre m et M; on a **m ≤ *f*(x) ≤ M**

On intègre, on a alors  ≤ ≤ ,

C'est-à-dire : m(b - a) ≤  ≤ M(b - a)

h) **Définition : Soit *f* une fonction *continue et positive*  sur [a ; b].**

# La valeur moyenne de *f* sur [a ; b] est le réel .

Interprétation graphique :

Puisque , on a donc . Cf

Ainsi, l’aire du domaine associé à une fonction f sur [a ; b] est

-

égale à celle du rectangle de dimensions  et b – a.

Interprétation cinématique :

La vitesse moyenne d’un mobile est la valeur moyenne de la vitesse . En effet, avec la notation donnée, on a :

*vitesse moyenne* = = ** = *valeur moyenne de la vitesse*.

**II ] Primitives d'une fonction**

1. **Définition** :Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est **une primitive** de *f* lorsque **la dérivée** de F sur I est *f* . **F ' = *f***

Exercice 2 : Recherche des primitives des fonctions usuelles.

1. **Théorème 1:** (admis) Toute **fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I**
2. **Théorème 2** : Les primitives de *f* sur un intervalle diffèrent entre elles d'une constante ; les primitives de *f* sont de la forme F + k (où k est une constante).

Exemple (vocabulaire important) :

Déterminer **une** primitive sur IR de *f*(*x*) = *x*3 - 2*x* + 3 : F(*x*) = - *x*² + 3*x*

Déterminer **les** primitives sur IR de *f*(*x*) = *x*3 - 2*x* + 3 ; F(*x*) = - *x*² + 3*x* + k (k∈ IR)

Déterminer **la** primitive sur IR de *f*(*x*) = *x*3 - 2*x* + 3 telle que F(0) = 1 ;

F(*x*) = - *x*² + 3*x* + k et F(0) = 1 ⇔ k = 1 d'où F(*x*) = - *x*² + 3*x* + 1.

Remarque 1 : L'hypothèse **I est un intervalle (ou sur un intervalle [*a* ; *b*])** est fondamentale. En effet, soient les fonctions *F* et *G* définies sur IR\* par 

Sur chacun des intervalles ]-∞ ; 0[ et ]0 ; + ∞[, *F* et *G* ont la même fonction dérivée *f* (*x*) = -  mais il n'existe pas de constante *K* telle que, pour tout *x* de IR\*,on ait *G*(*x*) = *F*(*x*) + *K*.

Remarques 2 : La primitive d'une somme est la somme des primitives.

La primitive d'un produit d'une constante par une fonction est le produit de cette constante par la primitive de la fonction.

Exercice 3 : Soit la fonction *f* définie sur par .Déterminer les réels a, b et c tels que F(*x*) =  soit une primitive de *f*.

1. **Théorème** : Soit une fonction *f* continue sur un intervalle I et *a* un élément de I. L'**unique primitive de *f* sur I prenant la valeur 0 en *a*** est la fonction F définie par : F(*x*) =.
2. **Propriété :** Si F est une primitive quelconque de f continue sur I, a et b étant des réels quelconques de I alors .

Exercice 4 : Calculer  et 

1. **Intégration par partie :**  **(ROC)** Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u ' et v ' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I on a :



Exercice 5 : Calculer  ;  et  (parfois 2 intégrations par partie sont nécessaires).

Remarque:

La formule de dérivation par parties est basée sur la propriété des dérivées : [u v]' = u'v + uv'

Elle pourra être retenue de façon abrégée sous la forme ⌠⌡u'v = [u v] - ⌠⌡uv' ou ⌠⌡uv' = [u v] - ⌠⌡u'v

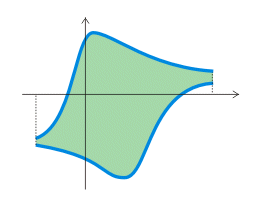
Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première. Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v'.

On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.

ATTENTION : 1 **primitive** 🡪 c'est une **fonction**

1 **intégrale** 🡪 c'est un **nombre** (positif, négatif ou nul) calculé à partir d'une primitive

**III ] Application du calcul intégral**



Cf

Cg

a

b

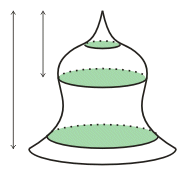
1. **Calcul d'aires de surfaces planes** :

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] (a < b) telles que, pour tout *x*  [a ; b] : *g*(*x*) < *f*(*x*).

L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de *f* et de *g* et les droites d'équation *x* = a et *x* = b, c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant

{ a *x*b ; *g*(*x*)  y  *f*(*x*) }

est donnée en unités d'aires par  ( *f(x) - g(x)* ) *dx*



H

h

S(h)

1. **Calcul de certains volumes:**

Pour un volume V de hauteur H dont la section avec un plan à la hauteur h a pour aire *S(h)*, on a :

V =*S(h) dh*  unités de volume.

Cas particulier : Soit C un arc de la courbe d’équation *y = f(x)* avec *f(x)* 0 sur [a ;b]. Par rotation autour de l’axe (xx’), cette courbe engendre une surface de révolution d’axe (*xx’*).Cette surface délimite un solide de révolution. La section de ce solide par un plan perpendiculaire à (*xx’*) est un disque d’aire  . Son volume est donné par 

Exercice 6 : (C ) est la courbe de la fonction *f(x)* = sin(*x*) sur [0 ; ].

1. Calculer l’aire de la surface délimitée par la courbe et l’axe (*xx’*).
2. Calculer le volume engendré par la rotation de cette courbe autour de l’axe (*xx’*).