TD : Topologie et matrices
Eléments de correction

1. Topologie des espaces vectoriels normés

Correction de l'Exercice 1.

Rappel : Une partie $A \subset E$ est dite convexe si pour tout couple de points de A le segment $[ab]$ est inclus dans A i.e :

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad [ab] = \{ta + (1-t)b \quad , \quad t \in 0,1]\} \subset A.$$

Simple application de l'inégalité triangulaire.

Correction de l'Exercice 2.

1. Utiliser la concavité de la fonction ln en remarquant que $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ est une combinaison convexe de x^p et de y^q.
2. Poser $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$ puis appliquer l'inégalité précédente aux réels $x = \dfrac{|a_k|^p}{A^{1/p}}$ et $y = \dfrac{|b_k|^q}{B^{1/q}}$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et sommer sur k.

   Remarque. Quand $p = q = 2$, on a bien $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de Höder s'écrit

   $$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

3. Appliquer l'inégalité de Höder à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1}$.

Correction de l'Exercice 3.

1. Simple vérification utilisant la définition de la borne sup.
2. Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$.
   (a) on montre que les suites composantes sont de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$ i.e $\forall n \in \mathbb{N}$ $(u_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
   (b) on en déduit que les suites composantes convergent dans $\mathbb{R}$ i.e $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n := \lim\limits_{k\to+\infty} u_n^{(k)} \in \mathbb{R}$ existe.
   (c) on note $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on montre que $u \in \ell^\infty$
   (d) on montre que $u^{(k)} \to u$ dans $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ en utilisant le fait que $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
3. <u>Montrons que ℓ_C est un fermé de ℓ^∞ :</u>
   Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de ℓ_C et $u \in \ell^\infty$ telle que $u^{(k)} \to u$ dans ℓ^∞ et montrons que $u \in \ell_C$.
   (a) $u^{(k)}$ converge donc ses composantes convergent donc elles sont de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
   (b) on a : $\forall k, n, p \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \|u - u^{(k)}\|_\infty + |u_{n+p}^{(k)} - u_n^{(k)}| + \|u^{(k)} - u\|_\infty$
   (c) on en déduit que u est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |.|)$ et donc que u converge
   (d) donc $u \in \ell_C$
   Ceci montre que ℓ_C est fermé dans ℓ_∞.
   <u>Montrons que $LIM : \ell_C \to \mathbb{R}$ est continue :</u>
   (a) LIM est linéaire.
   (b) $\forall u \in \ell_C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \|u\|_\infty \underset{\text{pass. à la limite}}{\Rightarrow} \forall u \in \ell_C, \quad |LIM(u)| \leq \|u\|_\infty$.
   (c) LIM est donc linéaire continue de $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
4. $\ell_0 = LIM^{-1}\{0\}$ est fermé par continuité de LIM.
5. Soit $u \in \ell_0$. Montrons que u peut être approché par une suite d'éléments de ℓ_{00}.
   (a) on définit $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^{(k)} := (u_0, u_1, ..., u_k, 0, 0, ...) \in \ell_{00}$
   (b) on montre que $u^{(k)} \to u$ dans ℓ_∞

   Remarque : cette démonstration marche pour n'importe quelle suite $u \in \ell^\infty$ si bien que ℓ_{00} est en réalité dense dans ℓ^∞. Ainsi les inclusions $\ell_{00} \subset \ell_0 \subset \ell_C \subset \ell_\infty$ entrainent la densité de ℓ_0 et ℓ_C dans ℓ^∞.

Correction de l'Exercice 4.

1. Par hypothèse $\forall B \in E, \quad N(\varphi_A(B)) \leq \underbrace{KN(A)}_{:=C}N(B)$ donc φ_A est une application linaire continue.

   Remarque : on déduit de cette inégalité que $|||\varphi_A||| \leq KN(A)$ ($|||\varphi_A|||$ est la meilleure constante)

2. (a) On vérifie les 3 axiomes d'une norme.
   Equivalence des normes :
   . d'après la remarque : $\|A\| \leq KN(A)$
   . par continuité de φ_A on a :

   $$N(A) = N(\varphi_A(I)) \leq |||\varphi_A|||N(I) \quad \Rightarrow \quad N(A) \leq N(I)\|A\|$$

   (b) La norme $|||.|||$ est une norme subordonnée donc
   . $\|AB\| = |||\varphi_A \circ \varphi_B||| \leq |||\varphi_A||||||\varphi_B||| \quad \Rightarrow \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
   . $\|I\| = |||id|||| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|I\| = 1$.

Correction de l'Exercice 5.

1. Supposons qu'il existe deux points fixes : $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors f étant k-lipchitzienne il en découle

   $$\|f(x) - f(x)\| \leq k\|x - y\| \quad \Rightarrow \quad \|x - y\| < \|x - y\|.$$

   Absurde !

2. Comme $f(\ell) = \ell$ on a

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+1} - \ell\| \leq k\|x_n - \ell \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - \ell\| \leq k^n\|x_0 - \ell\|.$$

   Or $k \in]0,1[$ donc $k^n \to 0$ et donc $\|x_n - \ell\| \to 0$ i.e $x_n \to \ell$ dans E.

3. $\|x_n - \ell\| \leq k^n\|x_0 - \ell\|$.

Correction de l'Exercice 6.

1. . $\forall x \in [0,1], \quad |P(x)| \leq |a| + |b| + |c| \quad \Rightarrow \|P\|_\infty \leq 3\|P\|$.
   En prenant $P(X) = X^2 + X + 1$ on voit qu'on ne peut pas faire mieux que 3.
   <u>Ccl :</u> la norme de l'endomorphisme identité de $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|)$ dans $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|_\infty)$ est 3.
   . Il s'agit d'exprimer les coefficients en fonction de valeurs de P en des points particuliers. Par exemple $c = P(0)$.
   Utilisons les polynômes de Lagrange

   $$P_0(X) = 2(X-1)(X-1/2), \quad P_{1/2}(X) = 4X(X-1), \quad P_1(X) = 2X(X-1/2).$$

   On sait que $(P_0, P_{1/2}, P_1)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que

   $$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad P(X) = P(0)P_{0(}X) + P(1/2)P_{1/2}(X) + P(1)P_1(X).$$

   En identifiant les coefficients on obtient les valeurs de a, b et c :

   $$\begin{cases} a = -4P(1/2) + 2P(1) + 2P(0) \\ b = 4P(1/2) - P(1) - 3P(0) \\ c = P(0) \end{cases}$$

   donc

   $$|a| \leq 8\|P\|_\infty, \quad |b| \leq 8\|P\|_\infty, \quad |b| \leq 8\|P\|_\infty$$

   et donc

   $$\|P\| \leq 8\|P\|_\infty.$$

   En prenant $P(X) = X^2 - X + \dfrac{1}{8}$ on voit qu'on ne peut pas faire mieux que 8.
   <u>Ccl :</u> la norme de l'endomorphisme identité de $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|)$ est 8.
   <u>Conclusion générale :</u> $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \dfrac{1}{3}\|P\|_\infty \leq \|P\| \leq 8\|P\|_\infty \Rightarrow$ les normes sont équivalentes.

2. $\|X^n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\|X^n\|_\infty = 1 \Rightarrow \begin{cases} X^n \to 0 & \text{pour la norme } \|.\|_1 \\ X^n \nrightarrow 0 & \text{pour la norme } \|.\|_\infty \end{cases} \Rightarrow$ les normes ne sont pas équivalentes.

   Par contre, vu que $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie on sait que les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_1[X]$.
   On cherche donc la meilleure constante $K > 0$ telle que

$$\|P\|_\infty \leq K\|P\|_1.$$

   On peut se ramener aux cas des polynômes

$$P_t(X) = X - t$$

   pour lesquels

$$\|P_t\|_\infty = \max(|P_t(0)|, |P_t(1)|).$$

   Considérer les cas $t \in [0,1]$ puis $t \notin [0,1]$ pour obtenir $K = 1 + \sqrt{2}$.

Correction de l'Exercice 7.

1. Le seul point problématique est l'axiome $(N1)$.
   En effet, si $\|P\|_A = 0$ alors $\forall x \in A, \quad P(x) = 0$. Pour que cela entraine $P = 0$ il faut et il suffit que A soit une partie infinie de $\mathbb{R}$.
2. δ_a est une forme linéaire continue SSi $a \in A$.
   Le sens direct est loin d'être évident.

Correction de l'Exercice 8.

1. $(E, \|.\|)$ est une Banach $\Rightarrow (\mathcal{L}_c(E), |||.|||)$ est un Banach $\Rightarrow$ toute série normalement convergente est convergente.
   Or $\displaystyle\sum_n \frac{|||A|||^n}{n!}$ est une série exponentielle (réelle) convergente $\Rightarrow \displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ converge dans $(\mathcal{L}_c(E), |||.|||)$.
2. Par inégalité triangulaire

$$\forall x \in E, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\| \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) x \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{||A^k x||}{k!} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{|||A|||^k}{k!} \right) \|x\| \leq e^{|||A|||}\|x\|$$

   donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$

$$\forall x \in E, \quad \|(\exp A)\, x\| \leq e^{|||A|||}\|x\|$$

   et finalement en passant à la borne sup sur tout les x de norme 1 :

$$|||\exp A||| \leq e^{|||A|||}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i \circ B^{k-i}}{k!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k}{i} A^i \circ B^{k-i}}{k!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \circ \sum_{k=i}^{n} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \circ \sum_{k=0}^{n-i} \frac{B^k}{(k)!} \end{aligned}$$

   Or l'application $(T, U) \to T \circ U$ de $\mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E)$ dans $\mathcal{L}_c(E)$ est bilinéaire continue puisque

$$|||T \circ U||| \leq |||T|||.|||U|||.$$

   Donc par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \circ \sum_{k=0}^{n-i} \frac{B^k}{(k)!}$$

   on a bien

$$\exp(A+B) = \exp A \circ \exp B.$$