TD : Topologie et matrices

1. Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1. Montrer que toutes boules (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé est convexe.

Exercice 2. (Inégalités de Hölder et de Minkowski)
Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^q}{q}$.
2. En déduire que $\forall((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$.
3. En déduire que $\forall((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 3. (espace de suites)
On considère ℓ^∞ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^∞ on note

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

1. Montrer que $\|.\|_\infty$ définie une norme sur ℓ^∞.
2. Montrer que $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.
3. Montrer que le sous-espace ℓ_C des suites convergentes est fermé dans ℓ^∞ et que l'application LIM qui a une suite de ℓ_C associe sa limite est continue.
4. Montrer que le sous-espace ℓ_0 des suites de limite nulle est fermé dans ℓ_C.
5. Montrer que le sous-espace ℓ_{00} des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans ℓ_0.

Exercice 4. Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre de neutre I. On suppose que E est munie d'une norme N possédant la propriété suivante :

$$(*) \quad \exists K > 0, \quad \forall A, B \in E, \quad N(AB) \leq KN(A)N(B).$$

1. Montrer que pour tout $A \in E$, l'on définie une application linéaire continue sur E en posant $\varphi_A(B) = AB$.
2. En notant $|||.|||$ la norme subordonnée à la norme N, on pose :

$$\|A\| = |||\varphi_A|||.$$

   (a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E équivalente à la norme N.
   (b) Quelles sont les propriétés de cette norme pour le produit et l'élément neutre I ?

Exercice 5. (Théorème du point fixe)
Soit I une partie fermée non vide d'un espace de Banach $(E, \|.\|)$ et f une application k-contractante de I dans I avec $k \in]0; 1[$.

1. Si f possède un point fixe, montrer qu'il est unique.
2. Soit $x_0 \in I$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I définie par la relation

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

   Monter que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe ℓ de f sur I.
3. Donner une majoration de $\|x_n - \ell\|$

Exercice 6. (normes sur les polynômes)

1. Dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ on considère les normes définies, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, par

$$\|P\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)|, \quad \text{et} \quad \|P\| = \max(|a|, |b|, |c|).$$

   Montrer que ces normes sont équivalentes puis déterminer les normes de l'endomorphisme identité de $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|)$ et de $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|)$ dans $(\mathbb{R}_2[X], \|.\|_\infty)$.

2. Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ on considère les normes définies par :

$$\|P\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|dx.$$

   (a) Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

   (b) Calculer

$$K = \sup_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1}.$$

Exercice 7. (normes sur les polynômes encore)
Soit A une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'on définisse une norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posante

$$\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. En supposant la condition de 1) réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application δ_a qui à P associe $P(a)$ soit une forme linéaire continue sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|.\|_A$.

Exercice 8. (exponentielle d'endomorphisme) Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme continu de E.

1. Montrer que la série de terme général $A^n/n!$ converge. On note $\exp A$ sa somme.
2. Montrer que

$$|||\exp A||| \leq e^{\|A\|}$$

3. Montrer que si A et B commutent, on a

$$\exp(A + B) = \exp A \circ \exp B.$$

2. Normes $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 9. On considère sur $\mathbb{K}^n$ les normes 1,2 ou ∞. Pour tout $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note :

$$|||A|||_i = \sup_{\|X\|_i\leq 1} \|AX\|_i$$

la norme d'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans lui même de matrice A dans la base canonique.

1. Montrer que :

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$
$$|||A|||_\infty = |||A^*|||_1 = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$
$$|||A|||_2 = |||A^*|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \qquad \text{où } \rho(M) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } M\}$$

2. Déterminer la norme de la forme linéaire $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ relativement aux normes définies précédemment.

Exercice 10. (norme de Hilbert-Schmidt)

1. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{tr(AA^*)},$$

2. Montrer que pour tout couple (A, B) de matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\|AB\|_{HS} \leq \|A\|_{HS}\|B\|_{HS}.$$

3. Comparer cette norme aux normes $|||.|||_1, |||.|||_2$ et $|||.|||_\infty$ définies dans l'exercice précédent.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer l'équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} A^n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(A) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k\geq 0} A^k \text{est convergente.}$$

Exercice 12. (matrices nilpotentes)
Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à l'ensemble

$$\{P^{-1}NP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

Exercice 13. (Théorème de Householder)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une norme sur $\mathbb{C}^n$ telle que pour la norme matricielle subordonnée l'on ait :

$$|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

1. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$.
2. Soit $\mu > 0$ et $Q(\mu) = Diag(1, \mu, \mu^2, ..., \mu^{n-1})$. Montrer que $\|X\|_* = \|Q(\mu)PX\|_2$ défini une norme sur $\mathbb{C}^n$.
3. Montrer que la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $|||M|||_* = \|Q(\mu)PMP^{-1}Q(1/\mu)\|_2$.
4. Montrer que $\lim\limits_{\mu \to +\infty} |||A|||_* = |||D|||_2$ où D est une matrice diagonale et $|||.|||_2$ désigne la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.
5. Conclure.

Exercice 14. (Matrice stochastiques)
Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastiques si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0, \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15. (espace des matrices symétriques)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients réels, $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives et $\phi \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$. On suppose que $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall\ M \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists\ A \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall\ \lambda > A,\ M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\phi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ et que $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $n = 2$ et $\phi(I_2) = I_2$. Montrer que : $\forall\ M \in S_2(\mathbb{R}),\ \chi_{\phi(M)} = \chi_M$. Montrer que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. φ conserve le déterminant).