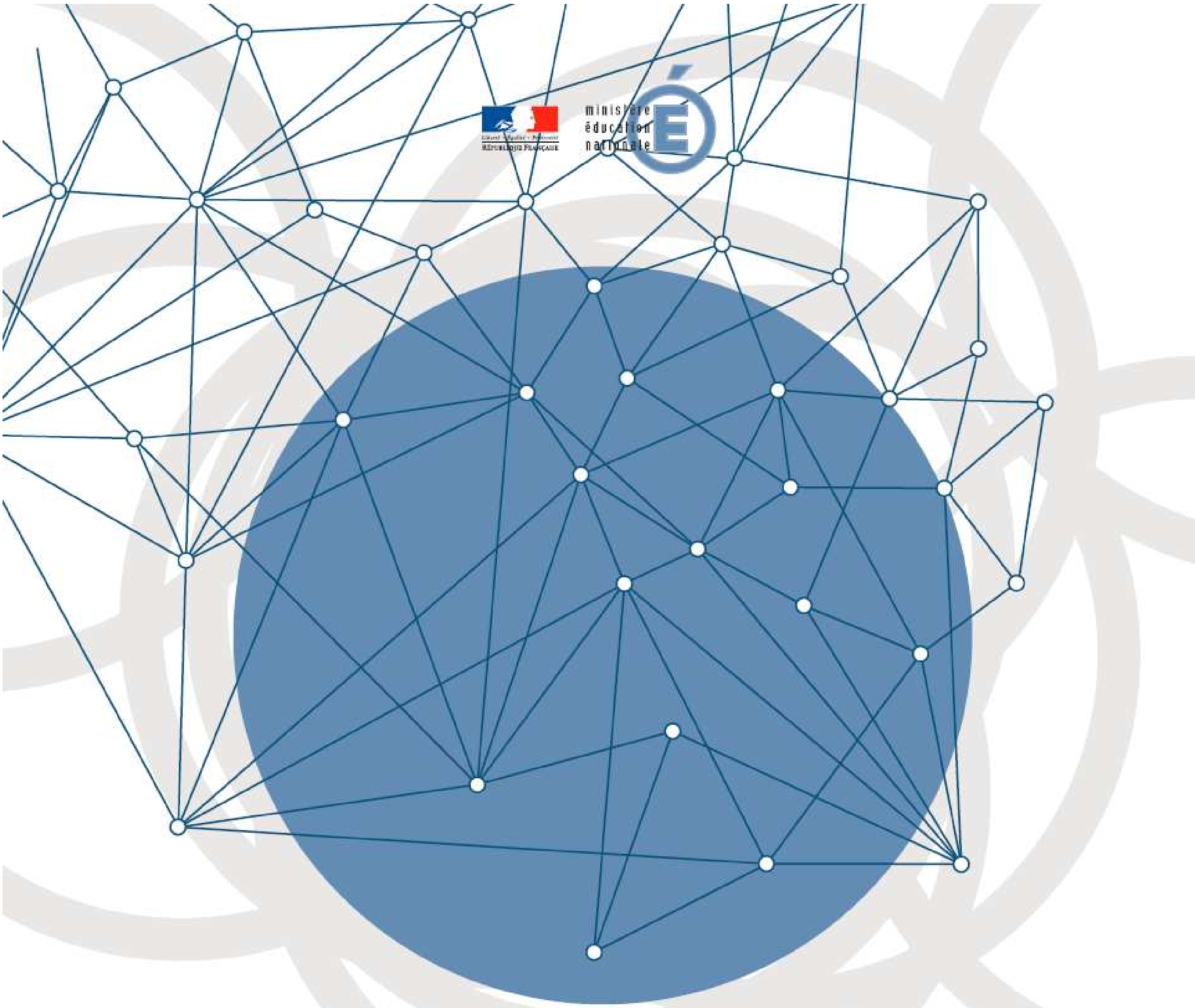


# OLYMPIADES
# de mathématiques
## 17 septembre 2014

**Toutes séries**
**Durée de l'épreuve : 4 heures de 7h30 à 11h30**
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

**Le candidat doit traiter quatre exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un quatrième exercice suivant la série (générale ou technologique) dans laquelle il est inscrit.**
**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse qu'il aura développée.**
**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**
**Pour les candidats de séries générales, l'annexe en page 7 est à rendre avec la copie.**

# Exercice 1 : 2014 j'adore *(commun à tous les candidats)*

## Partie A : Nombre premier

**Définition :**
Un *nombre premier* est un nombre entier naturel possédant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Les premiers *nombres premiers* sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11.

1. Déterminer tous les *nombres premiers* inférieurs à 60.
2. Déterminer les diviseurs premiers de 2014.

Exemple : les diviseurs premiers de 2013 sont : 3 ; 11 et 61.

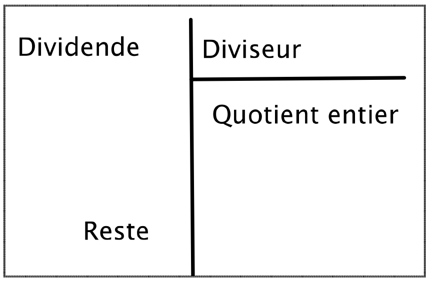
## Partie B : Décomposition d'un nombre entier naturel *a* en *base b*

Description : Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels.
Notons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les $n$ nombres de l'écriture de $a$ en *base b*

$$a = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \ldots + a_2b^2 + a_1b + a_0$$

On dit que cette écriture est l'écriture de $a$ en *base b* et
on note $a = (a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_b$

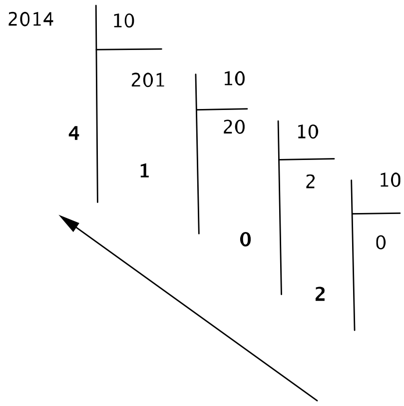
On peut trouver l'écriture en base $b$ d'un nombre
en utilisant les divisions euclidiennes.
Dividende = Diviseur $\times$ Quotient entier + Reste
Les termes $a_i$ sont les restes successifs ; ils sont donc plus petits que $b$.




Notre écriture usuelle des nombres entiers naturels fait appel à 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
On dit que ces nombres sont exprimés en *base 10*.

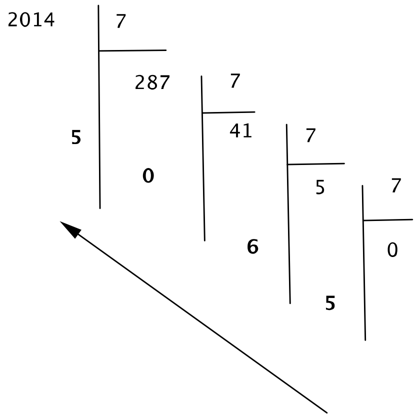
Par exemple : 2014 = $(2014)_{10}$ car
$$2014 = 2\times10^3 + 0\times10^2 + 1\times10^1 + 4\times10^0$$

Remarque : On arrête les divisions euclidiennes lorsque le quotient entier vaut 0.




Écrire un nombre entier en *base 7* consiste à n'employer que 7 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

La décomposition *en base 7* du nombre 2014 est
$$2014 = (5605)_7 = 5\times7^3 + 6\times7^2 + 0\times7^1 + 5\times7^0$$




1. Montrer que la décomposition en *base 2* du nombre 35 est : 35 = $(100011)_2$

2. Déterminer la décomposition du nombre 2014 en *base 2*.

### Partie C : Nombres brésiliens

En cette année de coupe du monde …
Parlons des Nombres Brésiliens
*Inspiré de l'Olympiade ibéroaméricaine de 1994*

Un nombre $n > 3$ est BRÉSILIEN, s'il existe un entier $b$ vérifiant $1 < b < n-1$ pour lequel la représentation de $n$ en *base b* s'écrit avec des nombres tous égaux.

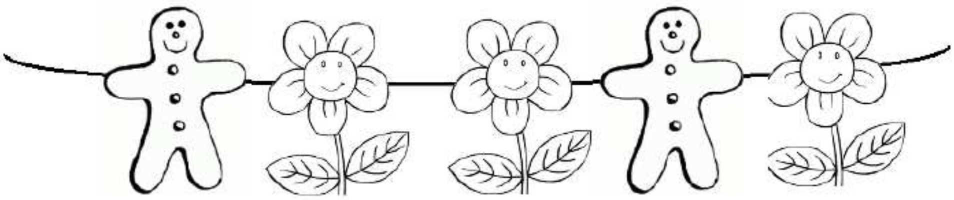
Par exemple : 15 est BRÉSILIEN car $15 = (1111)_2$
et 713 est BRÉSILIEN car $713 = (23\text{-}23)_{30}$
Remarque : Comme les nombres $a_i$ de la décomposition de 713 en *base 30* sont des nombres à deux chiffres, ils sont séparés par un tiret.

1. Étude du nombre 221
   a. Décomposer 221 en produit de deux facteurs premiers.
   b. Montrer que $221=(13\text{-}13)_{16}$. On en déduit alors que 221 est un nombre BRÉSILIEN.
2. Le nombre 2014 est-il un nombre BRÉSILIEN ? Justifier votre réponse.

## Exercice 2 : Des guirlandes *(commun à tous les candidats)*

### Partie1

Célia veut réaliser une guirlande sur laquelle elle veut accrocher des dessins. Elle dispose de 2 motifs différents : des bonhommes et des fleurs. Pour une raison esthétique, **elle ne veut pas que 2 bonhommes soient placés côte à côte.** Un exemple de guirlande à 5 éléments respectant cette condition est donné ci-dessous.



*Exemple de guirlande à 5 éléments avec 2 motifs*

Etant curieuse de nature, Célia aimerait connaître le nombre de guirlandes différentes qu'il est possible de réaliser en fonction du nombre d'éléments positionnés. On précise qu'on ne peut pas retourner une guirlande. Ainsi une guirlande Fleur – Bonhomme est différente d'une guirlande Bonhomme – Fleur.

1) Combien peut-elle réaliser de guirlandes différentes contenant 1 seul élément ?
2) Combien existe-t-il de guirlandes différentes composées de 2 éléments ?
3) Même question pour 3 et 4 éléments (donner la liste des possibilités) ?
4) Célia veut réaliser une guirlande de 10 éléments. Malgré tous ses efforts elle n'arrive pas à déterminer le nombre de combinaisons possibles. En expliquant la démarche, déterminer le nombre de guirlandes différentes constituées de 10 éléments.

### Partie 2

Célia décide d'ajouter à sa guirlande des soleils. Elle dispose donc maintenant de 3 motifs différents : bonhommes, fleurs et soleils. **Elle décide de ne jamais placer 2 bonhommes côte à côte, ni 2 soleils côte à côte.**
Combien existe-t-il de guirlandes différentes constituées de 10 éléments et respectant ces nouvelles contraintes ?

## Exercice 3 : Hexagones élastiques *(commun à tous les candidats)*

On considère un hexagone $(H)$ dont tous les angles intérieurs mesurent 120°.

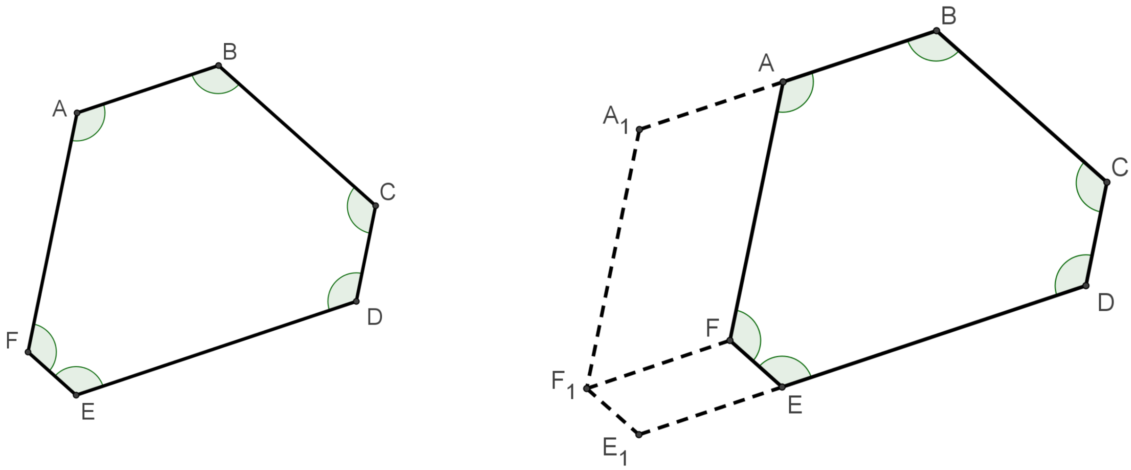
On note $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $f$ les longueurs de ses côtés pris dans le sens des aiguilles d'une montre (sur la figure ci-dessous, par exemple $a$ = AB, $b$ = BC, etc.)

1. Prouver que deux côtés opposés quelconques de $(H)$ sont parallèles, et que l'on a :

$$\begin{cases} a + b = d + e \\ b + c = e + f \\ c + d = f + a \end{cases}$$

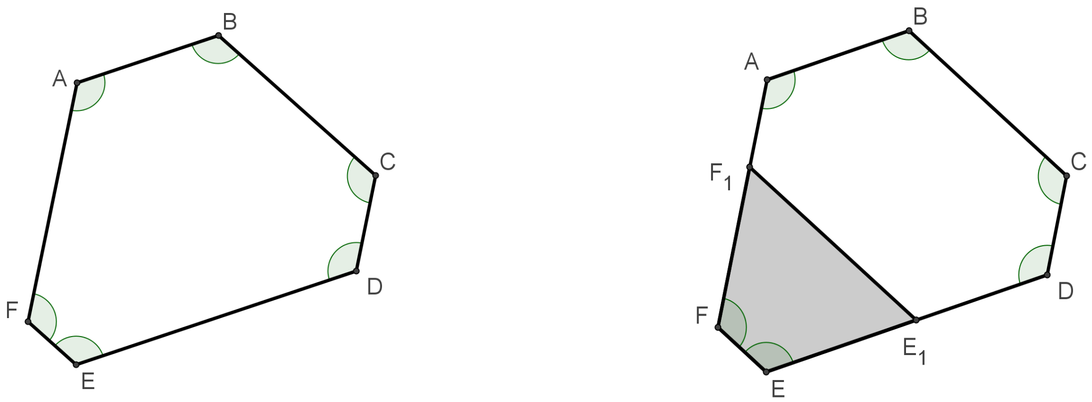
Pour transformer un hexagone $(H)$ dont tous les angles intérieurs mesurent 120° en un autre hexagone, on dispose des deux opérations suivantes :

– Opération A : On choisit deux côtés opposés de $(H)$ et, dans le même sens, on les prolonge ou diminue d'une même quantité en appliquant la même translation à trois sommets consécutifs (sur la figure ci-dessous, par exemple, les côtés opposés [AB] et [ED] sont prolongés en déplaçant les sommets E, F et A sur $E_1$, $F_1$ et $A_1$), dans la mesure où la nouvelle figure formée reste un hexagone convexe :




– Opération B :

On choisit trois côtés consécutifs (sur la figure ci-dessous [DE], [EF] et [FA]) de l'hexagone $(H)$ et on prolonge ou diminue les côtés [DE] et [FA] tous les deux d'une même quantité, dans la mesure où la nouvelle figure formée reste un hexagone convexe.




2. Prouver qu'en utilisant l'une ou l'autre des opérations A et B, on transforme $(H)$ en un nouvel hexagone dont les angles intérieurs mesurent 120°.

3. Soit $(H)$ un hexagone dont tous les angles intérieurs mesurent 120°.

3. a. Prouver qu'en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer l'hexagone $(H)$ en un hexagone régulier.

3. b. Soit $(H')$ un autre hexagone dont tous les angles intérieurs mesurent 120°. Prouver qu'en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer $(H)$ en $(H')$.

4. On suppose maintenant que $(H)$ est un hexagone régulier dont les côtés ont pour longueur 1.

Prouver qu'en trois étapes et en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer $(H)$ en un hexagone dont les côtés ont pour longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans un certain ordre.

Donner un exemple d'une telle transformation en trois étapes.

## Exercice 4 : Jeu de dominos *(pour les élèves de séries technologiques)*

***Les parties A. et B. sont indépendantes.***

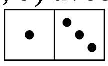
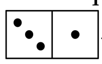
**Question préliminaire**

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels, déterminer le nombre de couples $(a, b)$ vérifiant la condition :

$$0 \leq a \leq b \leq 6.$$

*Notations et définitions*

- L'ensemble des couples $(a, b)$ d'entiers naturels vérifiant la condition $0 \leq a \leq b \leq 6$ est appelé jeu de dominos.
- Un domino sera noté $(a, b)$ avec la condition $0 \leq a \leq b \leq 6$, on dira qu'il porte $a + b$ points.

  Par exemple le domino  (qui peut aussi être retourné ) porte 4 points.

**Partie A.**

On distribue tous les dominos à sept joueurs.

Montrer que, pour l'un au moins des sept joueurs, la somme des points portés par les dominos qu'il possède est supérieure ou égale à 24.

**Partie B.**

1) On distribue tous les dominos à $n$ joueurs, $n$ entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Déterminer les valeurs possibles de $n$ et une distribution correspondante telle que :
   - tous les joueurs aient le même nombre de dominos,
   - la somme $S$ des points portés par les dominos soit la même pour chacun des joueurs.

Même question en supposant que l'on a retiré le domino (0, 0) du jeu avant la distribution.

## Exercice 4 : Calculs avec le nombre d'or *(pour les élèves de séries générales)*

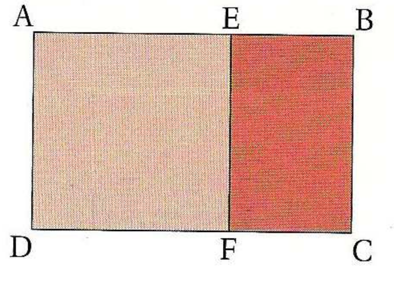
**Partie A : Le nombre d'or**

Peut-on trouver les dimensions d'un rectangle afin que celles-ci soient harmonieuses ?

Soit ABCD un rectangle. On place le point E sur le segment [AB] et le point F sur le segment [CD] tel que AEFD soit un carré.

Le rectangle ABCD est un rectangle d'or si le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au rapport de la longueur et de la largeur du rectangle EBCF c'est-à-dire si

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}.$$



On choisit AD comme unité de longueur, autrement dit AD = 1.
Soit $x$ le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ABCD ( on précise que $x$ est non nul ).

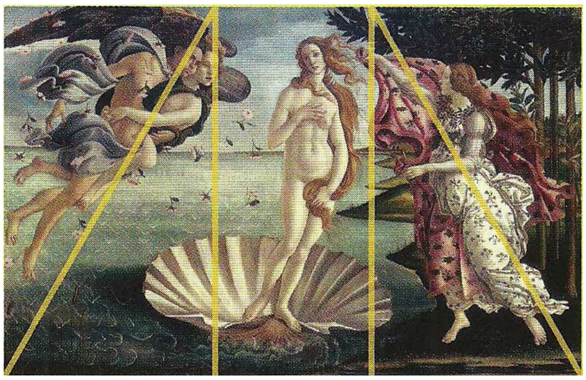
**1.** Exprimer AB et BE en fonction de $x$.

**2.** Montrer que $x$ est solution de l'équation (E) : $x^2 - x - 1 = 0$.

**3.** Résoudre l'équation (E) : sa solution positive est le nombre d'or, noté $\phi$.

On a attribué au nombre d'or un caractère mystique qui a fasciné, depuis des siècles, des mathématiciens, des philosophes, des architectes, des musiciens, …
En architecture, en sculpture, en peinture, le nombre d'or est utilisé comme un canon de la beauté.
On en trouve une des premières traces dans les travaux de géométrie d'Euclide ( env. 330 av. J.-C. – env. 275 av. J.-C. ). Dans le livre XIII de ses *Élèments*, Euclide étudie le « partage en moyenne et extrême raison » qui définit le nombre d'or.

Le nombre d'or, appelé également *divine proportion* par les artistes de la Renaissance, est omniprésent dans la composition de « la Naissance de vénus » de Botticelli ( 1444-1510 ). Tout d'abord le format de ce tableau est un rectangle d'or. De plus, les personnages à gauche et à droite de Vénus s'inscrivent sur les diagonales de deux rectangles d'or.
*La Naissance de Vénus* ( 1485 ) est une peinture sur toile de dimension 1,72 m $\times$ 2,78 m qui se trouve à Florence.



## Partie B : La suite de Fibonacci

**1.** On considère l'algorithme suivant :

<u>Variables</u> : A, B, C, I et N sont des entiers naturels
<u>Entrée</u> : Saisir N
<u>Initialisation</u> : Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Afficher A
<u>Traitement</u> : Pour I allant de 1 à N Faire
Afficher B
Affecter à C la valeur A + B
Affecter à A la valeur B
Affecter à B la valeur C
Fin Pour
<u>Sortie</u> : Dans le traitement

Exécuter cet algorithme pour N = 6. Compléter le tableau donné en annexe.

**2.**

Dans une étude sur l'évolution d'une population de lapins, en 1202, Léonard de Pise, dit Fibonacci a introduit cette suite de nombres. C'est une suite de nombres dont les deux premiers sont égaux à 1 et chaque terme suivant est égal à la somme des deux termes qui le précèdent.
Dans les fleurs de tournesol, les graines sont réparties en spirales. Il y en a 21 dans le sens des aiguilles d'une montre et 34 dans le sens contraire : 21 et 34 sont deux nombres consécutifs de la **suite de Fibonacci**.
Étrangement, ce phénomène se retrouve assez souvent dans la nature : pomme de pin, ananas, cactus, certains coquillages, … présentent tous différentes valeurs de cette suite.

Léonard de Pise (env. 1180-env. 1250), dit Fibonacci.

Remarque : Si on place sur une droite graduée, les points ayant pour abscisses les quotients de deux termes consécutifs :
$\frac{1}{1}$ ; $\frac{2}{1}$ ; $\frac{3}{2}$ ; $\frac{5}{3}$ ; $\frac{8}{5}$ ; $\frac{13}{8}$ ; $\frac{21}{13}$ ; $\frac{34}{21}$ ; $\frac{55}{34}$ ; …
on constate que les quotients se rapprochent du nombre 1,6. On peut démontrer que la suite des quotients obtenus avec la **suite de Fibonacci** a pour limite le nombre d'or.

Écrire les quinze premiers termes de la suite de Fibonacci.

## Partie C : Calculs avec le nombre d'or

On pose $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**1.** Montrer que $\phi^2 = \phi + 1$ puis que $\dfrac{1}{\phi} = \phi - 1$.

**2.** En utilisant l'égalité $\phi^2 = \phi + 1$ montrer que $\phi^3 = 2\phi + 1$.
En déduire de la même façon $\phi^4$ et $\phi^5$ en fonction de $\phi$.

**3.** Montrer que si $\phi^n = a\,\phi + b$ avec $n$, $a$ et $b$ des entiers naturels alors $\phi^{n+1} = (a + b)\,\phi + a$.

**4.** **a.** En déduire $\phi^6$, $\phi^7$ et $\phi^8$ en fonction de $\phi$.
Que constatez-vous à propos des coefficients $a$ et $b$ ?

**b.** Conjecturer l'expression de $\phi^{15}$ en fonction de $\phi$.

**5.** Démontrer que, pour tout naturel $n$, $\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}$.

---

ANNEXE (à rendre avec la copie) Nom : Série :
Etablissement :

| I | C | A | B |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |