FORMULAIRE SUR LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Suite (u_n) ; $n \in \mathbb{N}$.	Suite **arithmétique** de raison r	Suite **géométrique** de raison q
Définition	On passe de chaque terme au suivant en **ajoutant** la même quantité r (raison) : $u_{n+1} = u_n + r$	On passe de chaque terme au suivant en **multipliant** par la même quantité q (raison) : $u_{n+1} = q\,u_n$
Expression d'un terme quelconque u_n en fonction d'un précédent u_p.	Le $n^{\text{ième}}$ terme s'obtient à partir du $p^{\text{ième}}$ en ajoutant $n - p$ fois la raison r : $u_n = u_p + (n - p)r$ Et en particulier : $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n - 1)r$	Le $n^{\text{ième}}$ terme s'obtient à partir du $p^{\text{ième}}$ en multipliant $n - p$ fois par la raison q : $u_n = q^{n-p}\,u_p$ Et en particulier : $u_n = q^n\,u_0 = q^{n-1}\,u_1$
Nombre N de termes d'une somme	Dans la somme $u_p + ... + u_n$, il y a $N = n - p + 1$ termes Dans la somme $P + (P + r) + ... + D$, il y a $N = \dfrac{D-P}{r} + 1$ termes	Dans la somme $u_p + ... + u_n$, il y a $N = n - p + 1$ termes Dans la somme $1 + q + ... + q^n$, il y a $N = n + 1$ termes
Somme S de N termes successifs	$S = \dfrac{N(P+D)}{2}$ N = nombre de termes de la somme P = premier terme de la somme ; D = dernier terme de la somme	$S = \dfrac{P-qD}{1-q} = \dfrac{P(1-q^N)}{1-q}$ (si $q \neq 1$ sinon $S = NP$) N = nombre de termes de la somme ; q = raison de la suite P = premier terme de la somme ; D = dernier terme de la somme
Cas particulier	$S = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $(r = 1 ; P = 1 ; D = n)$	$S = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (si $x \neq 1$ sinon $S = n + 1$) $(q = x ; P = 1 ; D = x^n)$

<u>Applications</u> :

1. Soit (u_n) une suite arithmétique. On sait que $u_{11} = 121$ et $u_{15} = 165$. Calculer r, u_0, u_{100} puis $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 5n - 4$. Démontrer que (u_n) est arithmétique et calculer $S = u_{100} + ... + u_{200}$.
3. Calculer $S = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$ et $S' = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$.
4. Soit (u_n) une suite géométrique. On sait que $u_8 = \dfrac{1}{9}$ et $u_1 = 243$. Calculer q, u_0, u_{100} puis $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$.
5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 5 \times 4^n$. Démontrer que (u_n) est géométrique et calculer $S = u_{100} + ... + u_{200}$.
6. Calculer $S = 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n}$.
7. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{3\times 2^n - 4n + 3}{2}$ et $v_n = \dfrac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$.
   a) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
   b) Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
   c) Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.