

Suites associées

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n) .
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

Appeler l'examineur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = b_n - a_n.$$

- (a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .
- (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

- (c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examineur.

Appeler l'examineur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4. (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).
- (b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n .
- (c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n) .

Production demandée

- Construction de la feuille de calcul complète ;
- Formulation orale des conjectures ;
- Réponses argumentées à la question 4.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 007 2008

« Suites associées »

- 1) Mise en place des suites facile
- 2) Les suites semblent converger vers 0.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a _n	b _n	u _n	v _n	80*(3/4)^n	40*(1/4)^n		
2	0	20	60	80	40	80	40		
3	1	25	35	60	10	60	10		
4	2	21,25	23,75	45	2,5	45	2,5		
5	3	16,5625	17,1875	33,75	0,625	33,75	0,625		
6	4	12,578125	12,734375	25,3125	0,15625	25,3125	0,15625		
7	5	9,47265625	9,51171875	18,984375	0,0390625	18,984375	0,0390625		
8	6	7,11425781	7,12402344	14,2382813	0,00976563	14,2382813	0,00976563		
9	7	5,33813477	5,34057617	10,6787109	0,00244141	10,6787109	0,00244141		
10	8	4,00421143	4,00482178	8,0090332	0,00061035	8,0090332	0,00061035		
11	9	3,00331116	3,00346375	6,0067749	0,00015259	6,0067749	0,00015259		
12	10	2,25252151	2,25255966	4,50508118	3,8147E-05	4,50508118	3,8147E-05		
13	11	1,68940067	1,68941021	3,37881088	9,5367E-06	3,37881088	9,5367E-06		
14	12	1,26705289	1,26705527	2,53410816	2,3842E-06	2,53410816	2,3842E-06		
15	13	0,95029026	0,95029086	1,90058112	5,9605E-07	1,90058112	5,9605E-07		
16	14	0,71271785	0,712718	1,42543584	1,4901E-07	1,42543584	1,4901E-07		
17	15	0,53453842	0,53453846	1,06907688	3,7253E-08	1,06907688	3,7253E-08		
18	16	0,40090383	0,40090383	0,80180766	9,3132E-09	0,80180766	9,3132E-09		
19	17	0,30067787	0,30067787	0,60135575	2,3283E-09	0,60135575	2,3283E-09		
20	18	0,2255084	0,2255084	0,45101681	5,8208E-10	0,45101681	5,8208E-10		
21	19	0,1691313	0,1691313	0,33826261	1,4552E-10	0,33826261	1,4552E-10		
22	20	0,12684848	0,12684848	0,25369696	3,638E-11	0,25369696	3,638E-11		
23	21	0,09513636	0,09513636	0,19027272	9,0949E-12	0,19027272	9,0949E-12		
24	22	0,07135227	0,07135227	0,14270454	2,2737E-12	0,14270454	2,2737E-12		
25	23	0,0535142	0,0535142	0,1070284	5,6843E-13	0,1070284	5,6843E-13		
26	24	0,04013565	0,04013565	0,0802713	1,4211E-13	0,0802713	1,4211E-13		
27	25	0,03010174	0,03010174	0,06020348	3,5527E-14	0,06020348	3,5527E-14		
28	26	0,0225763	0,0225763	0,04515261	8,8818E-15	0,04515261	8,8818E-15		
29	27	0,01693223	0,01693223						
30	28	0,01269917	0,01269917						
31	29	0,00952438	0,00952438						
32	30	0,00714328	0,00714328						
33	31	0,00535746	0,00535746						
34	32	0,0040181	0,0040181						
35	33	0,00301357	0,00301357						
36	34	0,00226018	0,00226018						
37	35	0,00169513	0,00169513						
38	36	0,00127135	0,00127135						
39	37	0,00095351	0,00095351						
40	38	0,00071513	0,00071513						
41	39	0,00053635	0,00053635						
42	40	0,00040226	0,00040226						
43	41	0,0003017	0,0003017						

- 3) b) Les suites u et v convergent aussi vers 0.

Suites géométriques en faisant calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

- 4) Vérification des suites géométriques facile.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(a_n + b_n)/4}{a_n + b_n} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-a_n + b_n)/4}{b_n - a_n} = \frac{1}{4}$$

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 80 \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 40$$

$$\text{Enfin } a_n = \frac{u_n - v_n}{2} = \frac{80\left(\frac{3}{4}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2} \rightarrow 0 ; \quad \text{de même } b_n = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{80\left(\frac{3}{4}\right)^n + 40\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2} \rightarrow 0$$

Conclusion : sujet faisable en 1^{er} S