Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Nouvelle-Calédonie novembre 2015

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **6 points**

Pour équiper une de ses serres en système d'arrosage « goutte à goutte », une personne prend des renseignements concernant des goutteurs auprès d'un fournisseur de matériel de jardinage.
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
Les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près si nécessaire.*

Partie nº 1 :

On appelle X la variable aléatoire égale au débit, en litre par heure, d'un goutteur.
On admet que X est distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 2$ et d'écart type $\sigma = 0,3$.

1. Déterminer la probabilité que le débit en L.h^{-1} d'un goutteur pris au hasard soit compris entre 1,4 et 2,6 ?

2. Un goutteur est dit défectueux si son débit est inférieur à 1,4 L.h^{-1}.

   Déterminer la probabilité qu'un goutteur pris au hasard soit défectueux ?

Partie nº 2 :

La personne décide d'acheter 50 goutteurs.
On suppose le stock du fournisseur suffisamment important pour que le choix puisse être assimilé à un tirage successif avec remise.
On admet que la probabilité qu'un goutteur soit défectueux est égale à 0,023.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de goutteurs défectueux parmi les 50.

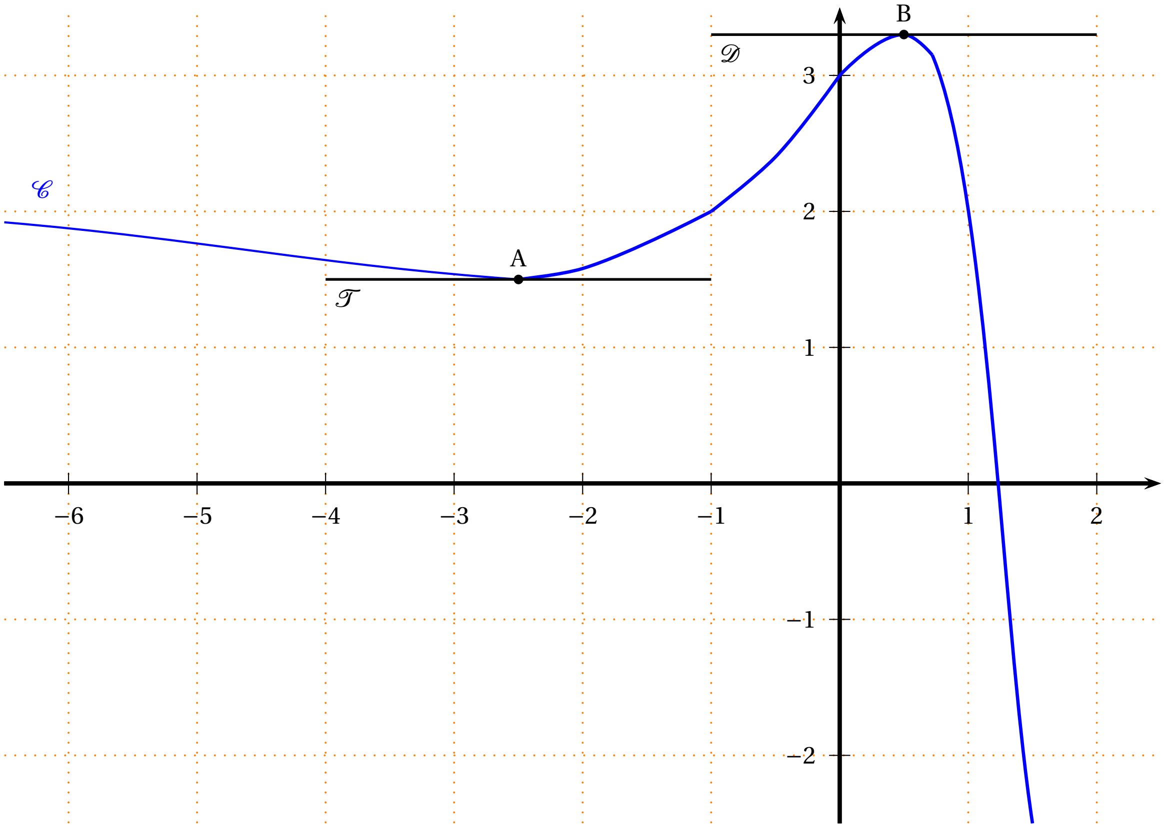
1. Justifier que la loi de probabilité de Y est binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,023$.

2. Calculer la probabilité qu'aucun goutteur ne soit défectueux.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 2 goutteurs soient défectueux.

EXERCICE 2 **4 points**

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$;



La droite $\mathscr{T}$ est tangente à $(\mathscr{C})$ au point A. La droite $\mathscr{D}$ est tangente à $(\mathscr{C})$ au point B.
Les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$ sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**. Justifier vos réponses.
Une réponse exacte non justifiée ne rapporte pas de point. Une réponse inexacte n'enlève pas de point.

Proposition 1 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est $[-1\,;\,0]$.

Proposition 2 : L'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 : $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 3$.

Proposition 4 : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

Exercice 3 — 3 points

Lors de la première insémination artificielle, on considère que la proportion de vaches fécondées est de 65 %.
Dans une exploitation, sur un échantillon de 120 vaches, 72 ont été fécondées dès la première insémination.
On suppose la population assez grande pour assimiler cet échantillon à un tirage effectué avec remise.

On rappelle que :
Pour une proportion connue p dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence des vaches fécondées pour un échantillon de taille 120, les bornes étant arrondies à 10^{-3} près.

2. Le résultat de la fréquence observée sur l'échantillon de vaches fécondées est-il en contradiction avec la proportion théorique $p = 0,65$ annoncée ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **7 points**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right]$ par :

$$g(x) = \ln(2x+3) - 3x + 1.$$

On note $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.

1. Calculer la valeur exacte de $g(3)$ et démontrer que $g(3) = 2\ln 3 - 8$.

2. Déterminer la limite de g en $-\dfrac{3}{2}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g sur $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right]$ puis montrer que pour tout x appartenant $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right]$, $g'(x) = \dfrac{-6x-7}{2x+3}$.

4.
   a. Étudier le signe de $g'(x)$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction g.

5. *Pour cette question, toute trace de recherche ou d'initiative sera prise en compte.*

   Résoudre par la méthode de votre choix (par le calcul ou à l'aide de la calculatrice) et en détaillant votre démarche l'équation $g(x) = -3x + 1$.