Avec $p = N - q$, on aura $p \geqslant p_0$ pour $q \leqslant N - p_0$. Soit donc $N \geqslant q_0$ et $N \geqslant p_0$, on veut couper la somme en trois parties et pour cela on suppose $q_0 \leqslant N - p_0$, soit finalement $N \geqslant p_0 + q_0$.

On a

$$x_N = \frac{1}{N+1} \sum_{q<q_0} (V_q U_{N-q} - VU) + \frac{1}{N+1} \sum_{q_0 \leqslant q \leqslant N-p_0} (V_q U_{N-q} - VU)$$
$$+ \frac{1}{N+1} \sum_{N-p_0<q\leqslant N} (V_q U_{N-q} - VU).$$

Notons, y_N, z_N et t_N ces trois sommes. On a, par inégalité triangulaire,

$$|y_N| \leqslant \frac{1}{N+1} q_0 (A^2 + |VU|),$$
$$|t_N| \leqslant \frac{1}{N+1} p_0 (A^2 + |VU|)$$

quant à la deuxième somme, comme $|V_q - V| \leqslant \varepsilon$, (car $q \geqslant q_0$), et $|U_{N-q} - U| \leqslant \varepsilon$, (car $N - q \geqslant N - q_0 \geqslant p_0$), on a

$$|z_N| \leqslant \frac{1}{N+1}(N - p_0 - q_0 + 1)(\varepsilon A + \varepsilon |V|) \leqslant \varepsilon(A + |V|)$$

En fait, la majoration $|U_k| \leqslant A$ et $|V_k| \leqslant A$ pour k assez grand conduit à $|U| \leqslant A$ et $|V| \leqslant A$ en passant à la limite, d'où

$$|x_N| \leqslant 2\varepsilon A + \frac{2A^2(p_0 + q_0)}{N+1},$$

majorant ayant $2\varepsilon A$ pour limite si N tend vers l'infini, donc devenant inférieur à $\varepsilon(2A + 1)$ pour N assez grand, ce qui prouve la convergence de x_N vers 0 et achève la justification. On donnera, dans le chapitre sur les séries entières, une justification plus rapide de ce résultat. ∎

On peut remarquer que la mise en forme consiste à mettre en évidence les hypothèses. D'abord, pour retrancher un nombre à une somme, le plus simple est de transformer ce nombre en somme indexée de la même manière, d'où un travail terme à terme sur $V_q U_{n-q} - VU$, où l'on peut faire apparaître la différence $(V_q - V)U_{n-q}$ ... ce qui introduit $(U_{n-q} - U)V$. Le reste n'est que routine.

Venons en enfin aux traitements bizarres que l'on peut faire subir aux séries, certains de ces traitements mettant en évidence le fait que la somme d'une série convergente n'a pas les propriétés algébriques d'une somme.

6. Le « fin du fin » sur les séries

On va étudier quatre propriétés, trois portant en fait sur l'indexation, permutation, sommation par paquets, partition des indices, la quatrième, la *transformation d'Abel* concernant un travail sur le terme général de la série.

Action des permutations

Soit une série u de terme général u_n dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou plus généralement dans E espace vectoriel normé. On a vu qu'en fait u est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, l'application $v = u \circ \varphi$ est une nouvelle suite donc on lui associe une série v de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ obtenue en permutant les termes de u.

11.69. *Un exemple*. Soit la série alternée u de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ (*série dite harmonique*), de somme U. On permute les termes de u de façon à prendre un terme positif puis deux négatifs, dans l'ordre où ils figurent dans u.

On pose donc

$$v_0 = 1,\ v_1 = -\frac{1}{2},\ v_2 = -\frac{1}{4};$$
$$v_3 = \frac{1}{3},\ v_4 = -\frac{1}{6},\ v_5 = -\frac{1}{8};$$

et plus généralement comme on travaille par tranches de trois termes, v_{3k} fera intervenir l'inverse du $(k+1)^{\text{ième}}$ nombre impair, soit $v_{3k} = \dfrac{1}{2k+1}$, et $v_{3k+1} = -\dfrac{1}{2(2k+1)}$, $v_{3k+2} = -\dfrac{1}{2(2k+2)}$.

On verra, tout de suite après l'étude de l'action des permutations, que l'on peut, dans la série v, associer 2 termes, en prendre 1, en associer 2, en prendre 1, ..., sans modifier la nature ni la somme de la série en cas de convergence (voir Théorème 11.78).

Cela donne

$$w_0 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\ w_1 = -\frac{1}{4},$$
$$w_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6};\ w_3 = -\frac{1}{8};\ldots$$

et plus généralement

$$w_{2k} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} = \frac{1}{2(2k+1)} \text{ et } w_{2k+1} = -\frac{1}{2(2k+2)}$$

la série w a donc pour terme général $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$. Diantre! ■

L'action de la permutation initiale a donc divisé par deux la somme. Où allons-nous si on ne peut plus faire ce qu'on veut.

Cet exemple nous montre la nécessité de résultats précis, que nous allons établir.

THÉORÈME 11.70. — *Soit une série u de terme général u_n dans E espace vectoriel normé complet, et φ une permutation de $\mathbb{N}$. Si u est absolument convergente, la série v des $v_n = u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et de somme $V = U$.*

Ce résultat sera d'un emploi fréquent pour les séries entières. Si on pose $a_n = \|u_n\|$ et $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, on sait que la suite des sommes partielles A_n est convergente, donc majorée par une constante A. (Sa somme d'ailleurs).

Avec $b_k = \|v_k\| = \|u_{\varphi(k)}\| = a_{\varphi(k)}$, on aura donc

$$B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n = a_{\varphi(0)} + \ldots + a_{\varphi(k)} \leqslant A_{\sup\{\varphi(0),\ldots,\varphi(k)\}} \leqslant A.$$

La suite, croissante, des B_n étant majorée est convergente, d'où la convergence absolue de la série v.

Soit alors $U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ une somme partielle de u. Comme φ est une bijection de $\mathbb{N}$ et que $v_k = u_{\varphi(k)}$, on a $u_r = v_{\varphi^{-1}(r)}$ donc

$$U_n = v_{\varphi^{-1}(0)} + v_{\varphi^{-1}(1)} + \ldots + v_{\varphi^{-1}(n)}.$$

Soit $r(n) = \sup\{\varphi^{-1}(0),\ \varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(n)\}$, la somme partielle $V_{r(n)}$ est telle que $V_{r(n)} - U_n$ soit la somme des v_k, pour $k \leqslant r(n)$, mais $k \notin \{\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(n)\}$ soit encore k tel que $\varphi(k) \notin \{0, 1, \ldots, n\}$. Or la série u converge absolument. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q > n_0,\ \sum_{n=p}^{q} \|u_n\| \leqslant \varepsilon,$$

a fortiori toute somme d'un nombre fini de $\|u_n\|$ pour des indices $n \geqslant n_0$ sera majorée par une somme du type précédent, donc par ε.

Si on choisit dans ce qui précède, $n \geqslant n_0$, il existe donc $r(n)$, (r est fonction de n), tel que $\|V_{r(n)} - U_n\| \leqslant \varepsilon$. En outre, $r(n)$, borne supérieure d'un ensmble de $n+1$ entiers est supérieur ou égal à n. Si donc n tend vers l'infini, $r(n)$ aussi, et à la limite on obtient $\|V - U\| \leqslant \varepsilon$. Ceci pour tout $\varepsilon > 0$ d'où $V = U$. ■

Quand aux séries semi-convergentes, l'exemple donné montre qu'il faut se méfier. On peut en fait établir le résultat suivant :

THÉORÈME 11.71. — *Soit une série semi-convergente réelle, u, non absolument convergente. Pour tout S de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, il existe au moins une permutation φ de $\mathbb{N}$ telle que la série $v = u \circ \varphi$ « converge » vers S.*

« Converge » car si $S = +\infty$ ou $-\infty$ il y a divergence.

Procédons par étapes. On dispose de u, de terme général réel u_n, semi-convergente, non absolument convergente.

LEMME 11.72. — *Soit $I = \{n;\ u_n > 0\}$ et $J = \{n;\ u_n < 0\}$, I et J sont des ensembles infinis.*

Car si $\operatorname{card}(I)$ était fini par exemple, et si $n_0 = \sup I$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 0$, donc $u_n = -|u_n|$, et la convergence de la série u serait alors absolue. On conclut de même si $\operatorname{card}(J)$ fini. ■

Comme il faut mettre les termes nuls quelque part, on va noter, pour $p \in \mathbb{N}$, $\varphi(p)$ l'indice du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme u_n, avec $u_n > 0$ et $\psi(p)$ l'indice du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme u_n, avec $u_n \leqslant 0$, $a_n = u_{\varphi(n)}$, le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme strictement positif de u, et $b_n = u_{\psi(n)}$, le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme négatif ou nul de u.

LEMME 11.73. — *Les séries a et b de termes généraux a_n et b_n sont divergentes.*