Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet 4 diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$;
- le quotient $\frac{4}{2}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $a_n = 2^n q_n$.

   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

   (b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de a_n et la somme des inverses des diviseurs de a_n. Que peut-on conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour vérification des valeurs et présentation de la conjecture.

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.

   (a) Donner la liste des diviseurs de a_n en fonction de q_n.

   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de a_n vaut 2 ?

   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 105 2009
« Une propriété … »

Partie A-1

Logiciel utilisé : Excel . Une bonne organisation est indispensable et une connaissance de la fonction MOD() et du « SI » permettant de « trier » les diviseurs.

N=	diviseurs d	N/d	inverse des diviseurs	somme inverse	nbr diviseurs	nbf div/ som inv=	entier	réponse
6	1	0	1	2	4	2	0	harmonique
	2	0	0,5					
	3	0	0,333333333					
	4	2	0					
	5	1	0					
	6	0	0,166666667					
	7	6	0					

Des candidats faisant les calculs « à la main » assistés par leur calculatrice risquent d'être confrontés à des problèmes … d'arrondis, sauf s'ils travaillent avec les fractions.

Programmation avec une la calculatrice TI 82 stats

PROGRAM : HARMO	A l' exécution
: Input N	
: 0 → M	? 6
: 0 → S	Résultat 4 et 2
: FOR (I , 1, N)	
: N/I → D	? 32
: If Ent(D) = D	Résultat 6 et 1.96875
: Then	
: S + 1/I → S	? 140
: M + 1 → M	Résultat 12 et 2.4
: End	
: End	? 28
: Disp M	Résultat 6 et 2
: Disp S	

Partie A-2

Logiciel utilisé : Excel

Difficulté pour les nombres premiers avec ce choix de logiciel. Mais un étudiant de spécialité maths doit quand même connaître le début de la liste et expliquer la technique pour savoir que 117 est premier (avec arrêt à 13). Là encore une calculatrice formelle est plus adaptée.

1	**59**
2	**61**
3	**67**
5	**71**
7	**73**
11	**79**
13	**83**
17	**89**
19	**97**
23	**101**
29	**103**
31	**107**
37	**109**
41	**113**
43	**127**
47	
53	

n	q_n	a_n
1	3	6
2	7	28
3	15	120
4	31	496
5	63	2016
6	127	8128
7	255	32640
8	511	130816
9	1023	523776
10	2047	2096128
11	4095	8386560
12	8191	33550336
13	16383	134209536
14	32767	536854528
15	65535	2147450880
16	131071	8589869056
17	262143	34359607296
18	524287	137438691328
19	1048575	549755289600
20	2097151	2199022206976

A titre d'information, voici une formule (!) permettant d'obtenir les nombres premiers avec Excel. dans une colonne « C »

```
1
2
3
=C3+1+EQUIV(0;FREQUENCE(PLAFOND(C3+(2*LIGNE(A$1:A$48));TRANSPOSE(DECALER(C$2;;;EQUIV(RACINE(C3);C$1:C3;1))));C3+LIGNE(B$2:B$106));0)
=C4+1+EQUIV(0;FREQUENCE(PLAFOND(C4+(2*LIGNE(A$1:A$48));TRANSPOSE(DECALER(C$2;;;EQUIV(RACINE(C4);C$1:C4;1))));C4+LIGNE(B$2:B$106));0)
```

Logiciel utilisé : XCas

for n from 1 to 35
do
q:= 2^(n+1)-1;
a:= 2^n*q;
if isprime(q) then print(n,q,a) fi
od
	1,3,6
	2,7,28
	4,31,496
	6,127,8128
	12,8191,33550336
	16,131071,8589869056
	18,524287,137438691328
	30,2147483647,2305843008139952128

On peut conjecturer que les nombres a_n sont harmoniques

a:=8128; s:=0; ndiv:=0;
for i from 1 to a
do
if irem(a,i)=0
then invd:=1/iquo(a,i); ndiv:=ndiv+1;
print(ndiv,invd); s:=s+invd;
fi;
od;
print(s);
if irem(ndiv,s)= 0
then print(a,"est en division harmonique") ;
fi
	1,1/8128
	2,1/4064
	3,1/2032
	4,1/1016
	5,1/508
	6,1/254
	7,1/127
	8,1/64
	9,1/32
	10,1/16
	11,1/8
	12,1/4
	13,1/2
	14,1
	s:2 8128,"est en division harmonique"

question 3 : p premier n'a que 2 diviseurs et $\frac{1}{1}+\frac{1}{p}$ ne peut diviser 2

question 4 : les diviseurs de a_n dont $1, 2, 2^2..., 2^n, q_n, q_n.2, q_n.2^2..., q_n.2^n$ donc il y en a 2n+2 et la somme des inverses de ces diviseurs est

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{q_n 2^i}=(1+\frac{1}{q_n})\ (\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}})=(1+\frac{1}{q_n})(\frac{q_n}{2^n})=(\frac{q_n+1}{q_n})(\frac{q_n}{2^n})=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$$

ainsi a_n est en division harmonique

<u>Conclusion</u> : exercice difficile où la partie TICE est très importante (peut être trop pour un examen si on veut traiter le sujet avec un tableur ; le choix d'un logiciel de calcul formel est plus judicieux)

22/09/2009 Claude Poulin Nouméa

T.S **GRILLE D'OBSERVATION** **Sujet n° : 105**

Compétences de la fiche d'évaluation	COMPETENCES /	Nom :	Nom :	Nom :	Nom :	Nom :
Représenter la situation	1. Choisir le logiciel ou la calculatrice adapté					
	2. Etre capable d'obtenir les diviseurs de n avec les outils informatiques (avec un tableur MOD() et SI.					
	3. Vérifications pour 6, 32 et 140					
	4. Partie 2, remplir correctement ..					
	5. Trouver les premiers nombres 3,7,31,127					
	6. Réutiliser le premier programme pour répondre à b)					
	7. Justifier que 127 est premier					
	8. Prendre l'initiative d'essayer d'autres calculs					
	9. Proposer d'autres moyens					
Expérimenter, conjecturer	10. Emettre des conjectures					
	11. Faire des essais					
	12. Améliorer les conjectures					
	13. Persévérer					
	14. Avoir le souci d'être suffisamment précis ou clair					
	15. Avoir des idées très pertinentes au cours du TP.					
Démontrer, argumenter	16. Donner des éléments de démonstration					
	17. Mener à bien le dénombrement des diviseurs de α_n					
	18. Aborder correctement la démonstration finale					
	19. Mener la démonstration à son terme					