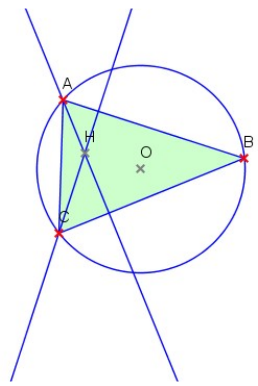
Samedi 6 Octobre

1. Eléments de correction du problème de la séance précédente.
2. Leçon de géométrie (Clothilde)
   128 Utilisation de groupes en géométrie.
3. Dévelopement pour les leçons:
   121 Géométrie du triangle.
   131 Utilisation de transformations en géométrie.

Thème 1 : cercle des neuf points
Triangles, homothéties

Propriété : *Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit.*



Démonstration:
On va utiliser le théorème de l'angle inscrit :
Si $(\vec{MA},\vec{MB})=(\vec{NA},\vec{NB})\quad[\pi]$ *alors M,A,B et N sont cocycliques.*

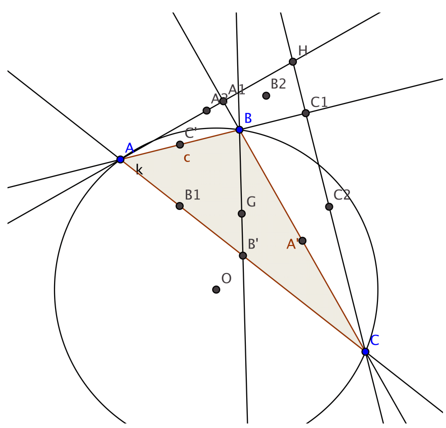
$(\vec{H'C},\vec{H'B})=-(\vec{HC},\vec{HB})\quad[\pi]$ (par symétrie)

$=(\vec{HB},\vec{HC})=(\vec{HB},\vec{AC})+(\vec{AC},\vec{AB})+(\vec{AB},\vec{HC})=\frac{\pi}{2}+(\vec{AC},\vec{AB})+\frac{\pi}{2}=(\vec{AC},\vec{AB})\quad[\pi]$

Donc H',A,B et C sont cocyclique : H' est sur le cercle circonscrit à ABC

Théorème des neuf points: *Dans un triangle, les trois milieux des côtés, les trois pieds des hauteurs, les milieux des segment joingnant chaque sommets à l'orthocentre sont sur un même cercle appelé cercle d'Euler du triangle. Ce cercle a pour centre le milieu du segment joignant le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre, son rayon est égal à la moitié de celui du cercle circonscrit.*
Le centre du cercle d'Euler, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont sur une même droite appelée droite d'Euler.

Démonstration:
ABC est un triangle.
G est son centre de gravité.
A',B' et C' sont les milieux des côtés [BC],[AC] et [AB]
H est l'othocentre du triangle ABC.
A1,B1 et C1 sont les pieds des hauteurs issues des sommets A,B et C.
A2,B2 et C2 sont les milieux des segment [AH], [BH] et [CH].
O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC

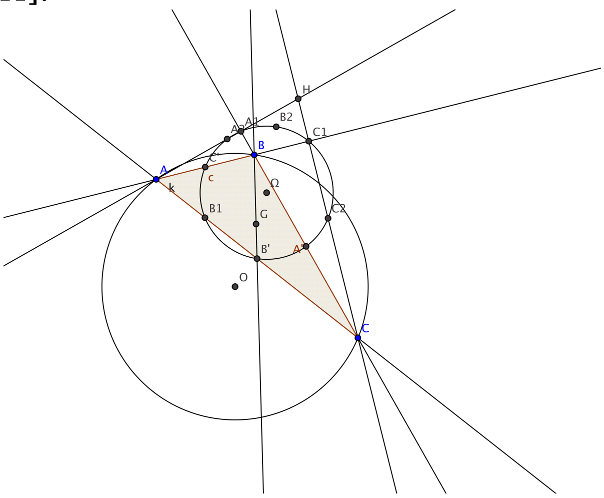


On note h l'homothétie de centre G et de rapport -1/2
Ainsi l'image du triangle ABC par h est le triangle A'B'C'.
Donc l'image du cercle circonscrit à ABC est le cercle circonscrit au triangle A'B'C' noté Γ.
Ce cercle a pour centre un point Ω tel que $\overrightarrow{G\Omega}$ = -1/2 $\overrightarrow{GO}$ et de rayon R/2
De plus l'image de la droite (AH) est une droite parallèle à (AH) passant par A', c'est dont la médiatrice du côté [BC]. En raisonnant de même pour les autres hauteurs, on en déduit que h(H)=O.
Ainsi G,H,O et Ω sont alignés.
Plus précisément :

$$\overrightarrow{H\Omega}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{G\Omega}=2\overrightarrow{GO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GO} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HO}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GO}=2\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GO}=3\overrightarrow{GO}$$

d'où : $\overrightarrow{HO}=2\overrightarrow{H\Omega}$ et Ω est le milieu de [OH].

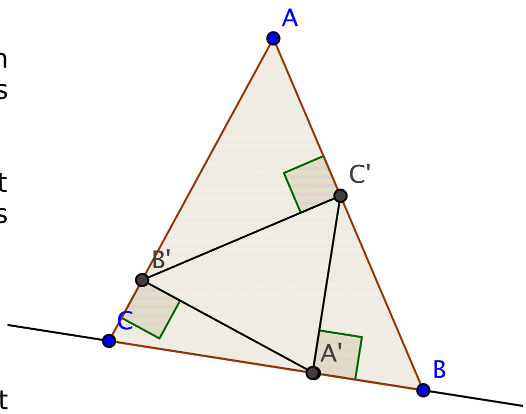
Comme $\overrightarrow{H\Omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$, l'image de O par l'homothétie de centre H et de rapport ½ (notée h') est Ω et donc l'image du cercle circonscrit par cette homothétie sera le cercle Γ.
Comme h'(A)=A2, A2 est sur Γ. De même B2 et C2 sont sur Γ.



On note A3 le symétrique de H par rapport à (BC). A3 est sur le cercle circonscrit d'après la propriété.
h'(A3)=A1 donc A3 est sur Γ.

Thème 2 : un problème de construction
Triangles, groupe des similitudes

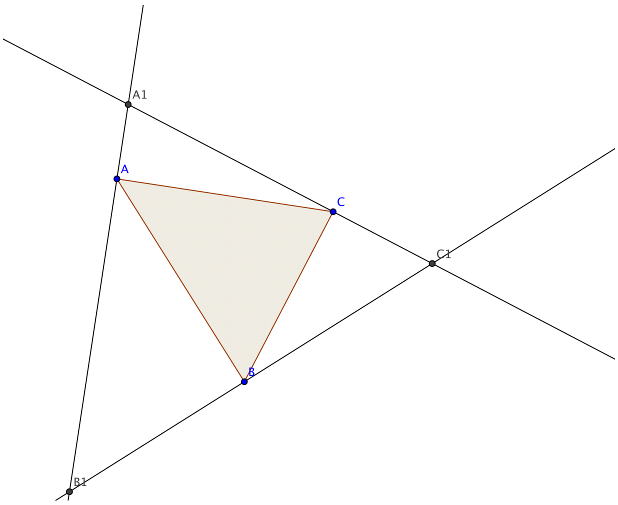
Etant donné un triangle ABC, on cherche à construire un triangle A'B'C' inscrit dans le triangle ABC dont les côtés soient perpendiculaires à ceux de ABC.



Plus précisemment, il s'agit de trouver trois points A',B' et C' respectivement sur les droites (BC),(AC) et (AB) tels que:
(A'B') soit orthogonale à (AC)
(A'C') soit orthogonale à (BC)
(B'C') soit orthogonale à (AB)

Nous allons démontrer l'existence d'un tel triangle et exhiber une méthode de construction des points A',B' et C':

Il existe un triangle A1B1C1 tel que :
(A1B1) est orthogonale à (AC)
(B1C1) est orthogonale à (AB)
(A1C1) est orthogonale à (BC)



(les côtés du triangle A1B1C1 sont deux à deux parallèles à celui du triangle A'B'C' qu'on veut construire)

Comme A1 et B1 sont distincts, de même que C et A, il existe une similitude s telle que :

s(A1)=C et s(B1)=A

On note O le centre de s , θ son angle et k son rapport.

Comme les droites (A1B1) et (AC) sont orthogonales, $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

Montrons que l'image de C1 par s est B:
L'image de la droite (C1A1) est une droite passant par C et perpendiculaire à (C1A1), c'est donc la droite (BC)
L'image de la droite (C1B1) est une droite passant par A et perpendiculaire à (C1B1), c'est donc la droite (BA)
L'image de C1 par s se trouve à l'intersection de ces deux images : s(C1)=B

Construction de O:
O étant le centre de la similitude s, on a les triangles rectangle en O suivants:

OA1C, OB1A, OC1B

Le point O est donc à l'intersection des cercles de diamètre [A1C], [B1A] et [C1B]

L'image de ABC par s est B'C'A':
La transformation h=s∘s est une homothétie car c'est une similitude admettant O comme point fixe et d'angle 2θ .
Notons A'=s(C)
h(A1)=s(s(A1))=s(C)=A'
Donc A' est sur la droite (OA1).
De plus, comme C est sur la droite (A1C1), A' st sur la droite (CB).
De même, en notant B' et C' les images de A et B par s, on obtient:
h(B1)=s(s(B1))=s(A)=B' donc B' est sur les droites (OB1) et (CA)
h(C1)=s(s(C1))=s(B)=C' donc C' est sur les droites (OC1) et (AB)

Montrons que le triangle A'B'C' convient:
(A'B')=s((CA)) donc les droites (CA) et (A'B') sont perpendiculaires.
(A'C')=s((CB)) donc les droites (CB) et (A'C') sont perpendiculaires.
(B'C')=s((AB)) donc les droites (AB) et (B'C') sont perpendiculaires.

Construction :
On construit A1B1C1
On construit O comme deuxième intersection des cercles de diamètres [BC1] et [AB1].
On construit A' comme intersection des droites (OA1) et (BC)

On construit B' comme intersection des droites (OB1) et (AC)
On construit C' comme intersection des droites (OC1) et (AB)