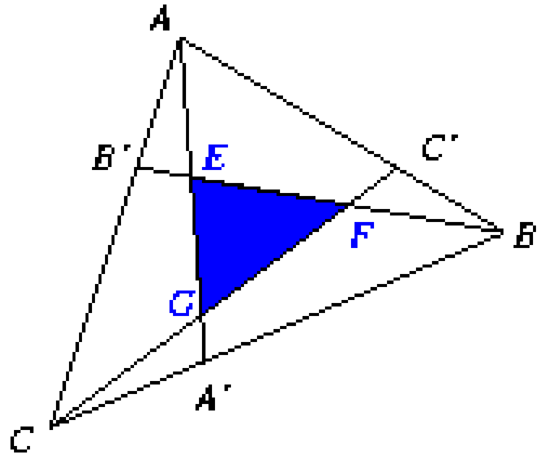
Outils pour aider l'amoureux indécis.

Le triangle de Dudeney (énoncé d'après le site de l'Université de Rouen) :



1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie:

a) Réalisez la figure « dynamique » construite à partir d'un triangle ABC quelconque.

A' est le point du segment [BC] tel que CA'= CB/3,
B' est le point du segment [AC] tel que AB'= AC/3,
C' est le point du segment [AB] tel que BC'= BA/3.

b) Observez les aires des triangles EFG et des trois triangles CGA', AEB', BFC'.
c) Observez les points E, F et G
d) Observez les aires des triangles EFG et ABC

2. Preuve:

Démontrez les conjectures.

a) l'aire du triangle EFG vaut la somme des aires des trois triangles CGA', AEB', BFC'.
b) E est le milieu de [GA], F est le milieu de [EB] et G est le milieu de [FC].
c) Quel est le rapport entre l'aire du triangle EFG et celle du triangle ABC ?

Solutions (site de l'Université de Rouen) :

Solution 1, proposée par Lucien Verney, Rouen

Notons |MNP| l'aire d'un triangle quelconque MNP. Puisque CA'=CB/3, l'aire |AA'C| vaut |ABC|/3. De même pour |BB'A| et |CC'B|, et donc |AA'C|+|BB'A|+|CC'B|=|ABC|.

Mais dans la somme des trois aires à gauche, chacun des triangles CGA', AEB' et BFC' est compté deux fois, alors que le triangle EFG n'est pas compté du tout. On en déduit |CGA'|+|AEB'|+|BFC'|=|EFG|, ce qui répond à la question 1.

Pour tout point P du plan et tout réel r, notons $h_{P,r}$ l'homothétie de centre P et de rapport r.On a par les hypothèses de construction de la figure : A'=$h_{C,1/3}$(B), et B=$h_{C',-1/2}$(A).

La composé des 2 homothéties $h_{C,1/3} o h_{C',-1/2}$ est une homothétie dont le rapport est le produit des 2 rapports, soit -1/6, et son centre est aligné avec les centres C et C', mais aussi avec A et A' : c'est donc G. Autrement dit A'=$h_{G,-1/6}$(A).

Le même raisonnement, en écrivant cette fois A'=$h_{B,2/3}$(C), et C=$h_{B',-2}$(A), prouve aussi que A'=$h_{E,-4/3}$(A).

On en déduit que E est le milieu de [GA]. De même, F est le milieu de [EB] et G est le milieu de [FC].

Enfin, en utilisant encore le fait que $A'=h_{G,-1/6}(A)$, on obtient |CGA'|=|AA'C|/7,

et de même |AEB'|=|ABB'|/7, et |BFC'|=|BCC'|/7.

Grâce au résultat de la question 1, on en conclut que |EGF|=|ABC|/7.

Question : Par quoi doit-on remplacer 1/3 dans l'énoncé pour que l'aire du triangle EFG soit la moitié de l'aire du triangle ABC ?

Solution 2, proposée par Pierre Renfer, Ostwald

On peut obtenir les coordonnées barycentriques dans le repère (A,B,C) de tous les points de la figure.

- A : (1,0,0)
- B : (0,1,0)
- C : (0,0,1)
- A' : (0,1,2)
- B' : (2,0,1)
- C' : (1,2,0)

La droite (AA') a pour équation z = 2y. La droite (BB') a pour équation x = 2z. Donc le point E a pour coordonnées (4,1,2). Par permutation circulaire, on obtient

- E : (4,1,2)
- F : (2,4,1)
- G : (1,2,4)

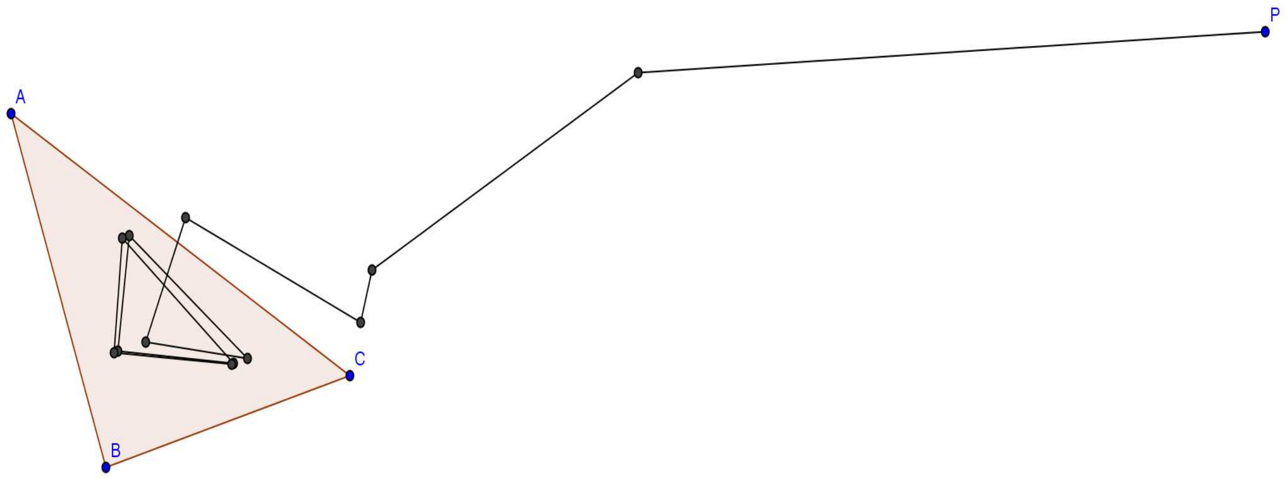
En divisant par 7, on obtient pour E, F et G les coordonnées de somme 1. En divisant par 3, on obtient pour A',B' et C' les coordonnées de somme 1. On vérifie facilement sur les coordonnées de somme 1, que E, F et G sont respectivement milieux de AG, BE et CF.

En choisissant l'aire du triangle ABC comme unité d'aire, on obtient l'aire d'un triangle MNP comme valeur absolue du déterminant dont les trois colonnes sont les coordonnées de somme 1 des trois points M,N et P. On trouve que les triangles AEB', BFC' et CGA' ont chacun 1/21 comme aire et que le triangle EFG a pour aire 1/7.

L'auteur de la solution 2 propose aussi une jolie histoire autour de cette figure.

L'amoureux indécis : il s'agit d'un garçon (Pierre), amoureux de trois charmantes jeunes filles : Alice, Berthe et Cécile, habitant respectivement en A , B et C. Pierre part d'un point P et marche en direction d'Alice, mais à mi-chemin il change d'avis et se dirige vers Berthe, puis change encore d'avis à mi-chemin et se dirige vers Cécile, puis, pris de remords à mi-chemin, se dirige à nouveau vers Alice, etc. (Si le point P est placé en G , il est condamné à décrire éternellement le triangle GEF).

Question : Montrer que, quel que soit le point P de départ, Pierre arrivera asymptotiquement sur le circuit GEF.



<u>Création d'un premier outil pour faciliter la construction :</u>

Objet initiaux A et B, objets finaux le milieu I de [AB] et le segment [AI]

<u>Création d'un deuxième outil pour faciliter la construction :</u>

Objet initiaux P, A , B et C, objet final le chemin qui va successivement vers A, B et C (en fait utilisation de 3 fois l'outil précédent)

<u>Preuve :</u>
on peut se placer dans un repère (B,A,C) et étudier d'abord la suite des coordonnées du point obtenu à l'aide du second outil

$(x, y) \mapsto (\frac{x+4}{8}, \frac{y+1}{8})$ ….