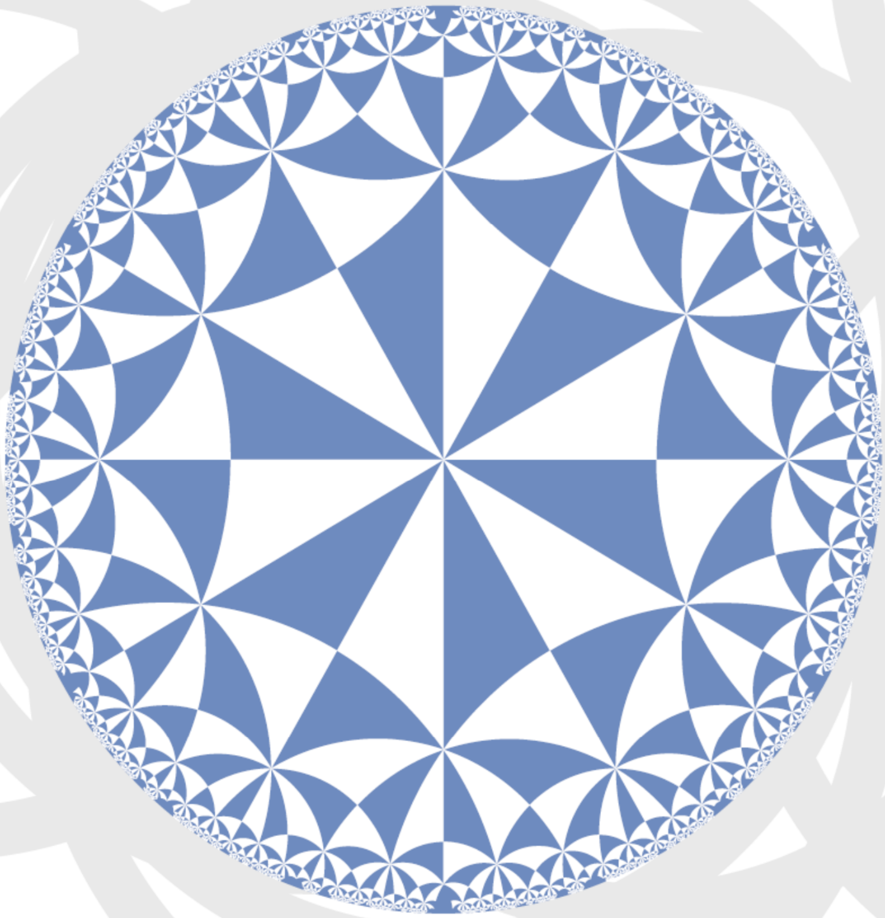


MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES

de mathématiques

Mercredi 16 septembre 2015

Toutes séries

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter quatre exercices : les exercices 1, 2 communs à tous les candidats et les deux exercices suivants (3 et 4) en fonction de la série (générale ou technologique) dans laquelle il est inscrit. ***Le candidat veillera à équilibrer le temps consacré à chaque exercice.***

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : Lacets denses, lacets simples (Commun à tous les candidats)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On définit une figure d'ordre n : c'est une figure constituée de deux alignements verticaux de n points, appelés œillets, situés sur deux parallèles et placés en vis-à-vis comme illustré ci-contre dans le cas $n = 2$ et le cas $n = 3$.


Figure d'ordre 2

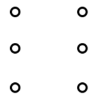
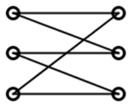
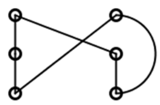
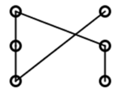


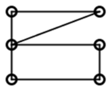
Figure d'ordre 3

On définit ensuite un lacet d'ordre n : c'est un chemin fermé passant une fois et une seule par chacun des $2n$ œillets d'une figure d'ordre n.

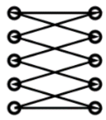

Lacet d'ordre 3

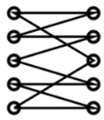

Lacet d'ordre 3


Chemin non fermé


Chemin fermé mais passant deux fois par le même œillet

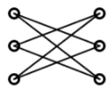
1. **Un exemple :** dans cette question (et uniquement cette question), on considère que les lignes sont espacées de 1 cm tandis que les deux colonnes d'œillets sont espacées de 2 cm.

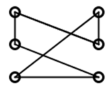




   a. Des deux lacets ci-contre, quel est le plus court ?
   b. Proposer un lacet d'ordre 5 plus court que les deux représentés.

2. Parmi tous les lacets, il y a ceux qu'on appelle *denses* : ce sont ceux qui changent de côté à chaque œillet.

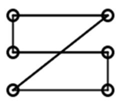

Lacet *dense*

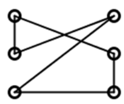

Lacet *non dense*

   a. Représenter tous les lacets d'ordre 2 et préciser ceux qui sont *denses*.
   b. Représenter tous les lacets *denses* d'ordre 3.

3. On considère maintenant une figure d'ordre 4.
   a. Montrer qu'il existe 72 lacets *denses* d'ordre 4.
   b. Déterminer le nombre de lacets *denses* d'ordre n.

4. Un lacet est dit *simple* si tout trajet joignant un des deux œillets du haut à un des deux œillets du bas ne fait que descendre ou rester à la même hauteur.


Lacet *simple*


Lacet *non simple*

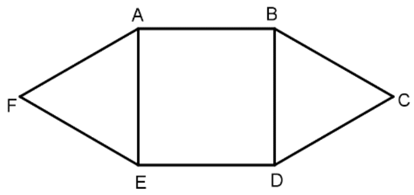
À droite le lacet n'est pas *simple*, car un des chemins partant de l'œillet en haut à droite pour joindre l'œillet en bas à droite descend puis remonte puis redescend, puis remonte !

   a. Représenter un lacet *simple* et *non* dense.
   b. Représenter tous les lacets d'ordre 3 qui sont à la fois *simples* et *denses*.
   Pour compter tous les lacets *denses* et *simples* d'ordre n, on peut remarquer qu'une fois le trajet de haut en bas établi, on n'a plus le choix du trajet retour. Il suffit donc de compter le nombre de trajets de haut en bas.
   c. Déterminer le nombre de lacets *denses* et *simples* d'ordre 4.
   Généraliser le ***c*** à l'ordre n.

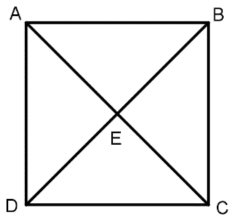
Exercice 2 : Partage d'un polygone (Commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, *partager un polygone P* consiste à trouver un entier k supérieur ou égal à 2 et des polygones P_1, P_2 , … P_k qui recouvrent entièrement le polygone P en n'ayant en commun que des points appartenant à leurs côtés (**on n'exige pas que ces polygones soient tous de même nature**).
On dit que le partage réalisé est *bon* lorsque le polygone P est partagé en des polygones tous réguliers, c'est-à-dire que chacun d'eux a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles intérieurs de même mesure.

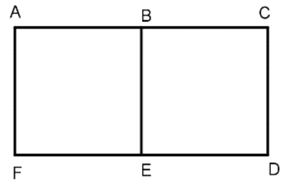
Voici des exemples de partages



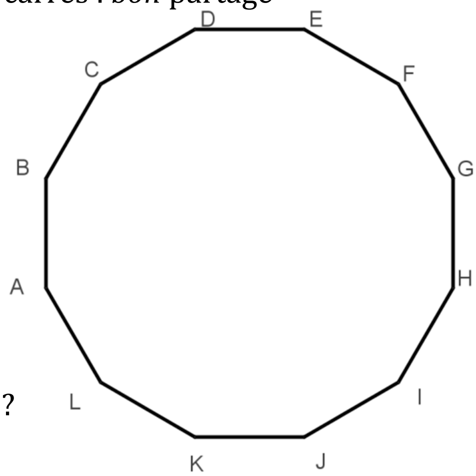
Un hexagone partagé en un carré et deux triangles équilatéraux : *bon* partage



Un carré partagé en quatre triangles non équilatéraux : le partage n'est pas *bon*.



Un rectangle partagé en deux carrés : *bon* partage



1. Exhiber un bon partage :
   a. d'un triangle équilatéral ;
   b. d'un carré ;
   c. d'un hexagone régulier ;
   d. d'un dodécagone régulier (douze sommets, voir ci-contre).

2. Est-il possible d'obtenir un bon partage d'un pentagone régulier ?

3. Quels sont les polygones réguliers pour lesquels il est possible d'obtenir un bon partage ?

Exercice 3 : Joli coquillage (Elèves de séries technologiques)

La nature présente des images géométriques. Sur ce coquillage (conus Aulicus), le graphisme varie : certains cônes sont très sombres avec peu de motifs, d'autres très clairs avec de nombreux motifs. On peut y reconnaître un dessin assimilable à des triangles de Sierpinski.

Wacław Franciszek Sierpiński (1882 – 1969) étudie les mathématiques à Varsovie. Ses très nombreux travaux (plus de 70 articles et 50 livres !) sur la théorie des ensembles, la théorie des nombres, la théorie des fonctions… lui valent très tôt une grande considération dans la communauté. Durant la Première Guerre Mondiale, il va en Russie où il étudie les ensembles analytiques. De retour en Pologne après la guerre, il est nommé professeur à Varsovie où il poursuit ses travaux sur les grandes théories. Il travaille également sur son fameux triangle qui deviendra plus tard une des références parmi les objets fractals. Elu en 1921 à l'Académie Polonaise, il est nommé Doyen de l'université de Varsovie la même année. En 1928, il est élu Président de la société scientifique de Varsovie et Président de la société mathématique polonaise.

Le triangle de Sierpinski est un objet fractal * réalisé à partir d'un triangle équilatéral. On construit à l'intérieur du triangle de départ un triangle blanc obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle de départ. Chaque nouveau triangle noir est partagé selon la même règle.
Voici les premières transformations :

figure 0 figure 1 figure 2 figure 3 figure 4

**Objet fractal : Objet obtenu, à partir d'une figure géométrique, par exemple un segment ou un triangle, qui est constamment modifiée suivant une règle précise à partir de la dernière figure transformée, et cela jusqu'à l'infini.*

Partie 1

1. Comptez les triangles noirs dans chacune des quatre premières figures (numérotées de 0 à 3), et écrivez ces nombres dans l'ordre.
2. On considère cette suite de nombres. On passe de l'un à l'autre par une opération mathématique. Proposez une opération en expliquant votre démarche.
3. En déduire que la figure 4 comporte 81 triangles noirs.
4. On appelle U_n le nombre de triangles noirs de la figure n. Déduisez la relation, pour $n \geq 1$, entre U_n et U_{n-1} .

Partie 2

1. On considère que le triangle noir a une aire de 1 au départ (figure 0). Recopiez et complétez le tableau ci-contre.
2. Proposez une relation mathématique permettant de trouver l'aire A_n de la totalité des triangles noirs en fonction de n.
3. Comment évolue l'aire noircie A_n lorsque n devient très grand ? Qu'en déduisez-vous pour un coquillage ayant un grand nombre de motifs ?

n (numéro de figure)	U_n (Nombre de triangles noirs)	A_n (Aire de la partie noircie de la figure n)
0	1	1
1		
2		
3		
4		

Partie 3

On s'intéresse maintenant au périmètre des triangles noirs.
Dans cette partie, on considère que triangle de la figure 0 a un côté de longueur 1. Son périmètre P_0 est donc d'une longueur de 3.

1. Quelle est la somme P_1 des périmètres de tous les triangles noirs de la figure 1 ?
2. Quelle est la somme P_2 des périmètres de tous les triangles noirs de la figure 2 ?
3. Exprimez, en fonction de n, la somme P_n des périmètres de tous les triangles noirs de la figure n. Expliquez votre démarche.
4. D'après vous, comment évolue le périmètre P_n lorsque n devient très grand ?

Exercice 3 : Suites de nombres (Elèves de séries générales)

> Karl Friedrich Gauss était un mathématicien astronome et physicien allemand d'exception. On le surnomme « le prince des mathématiciens » et il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il naît le 30 avril 1777 à Brunswick dans une famille d'artisans. Enfant prodige, il apprend à lire et à compter dès l'âge de trois ans et l'on raconte qu'à cet âge, il corrige une erreur dans les comptes de son père.
> Une seconde anecdote relate également comment Gauss sait faire preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le maître d'école de Gauss demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune Gauss, alors âgé de 10 ans, impressionne son professeur en donnant la réponse correcte.

Partie 1 : Sauriez-vous faire aussi vite que Gauss ?

En les disposant de la manière indiquée ci-dessous il remarqua que, en additionnant le premier et dernier terme, on obtenait 101, et qu'il en allait de même en additionnant le deuxième et l'avant-dernier terme, le troisième et l'avant avant-dernier terme et ainsi de suite.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 48 & + & 49 & + & 50 \\
+ & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 53 & + & 52 & + & 51 \\
\hline
= & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

1. Terminer le calcul de Gauss et donner la valeur de S.

On souhaite à présent calculer les deux sommes suivantes :

$$S_{impair}=1+3+5+7+...+97+99 \qquad S_{pair}=2+4+6+8+...+98+100$$

<u>Méthode 1 :</u> Avec l'astuce de Gauss.

2. a. En reprenant l'idée de Gauss, calculer chacune de ces deux sommes.
   b. Utilisez le résultat obtenu à la question 1 pour vérifier ceux obtenus à la question 2.a.

<u>Méthode 2 :</u> Avec un algorithme.

3. Voici un algorithme permettant de calculer ces deux sommes :

1	**Variables :**	S_i (somme des nombres impairs)	
2		S_p (somme des nombres pairs)	
3		I (nombre impair courant)	
4		P (nombre pair courant)	
5	**Initialisation :**	S_i prend la valeur 0	
6		S_p prend la valeur 0	
7		I prend la valeur 1	// Ligne à commenter
8		P prend la valeur 2	// Ligne à commenter
9	**Traitement :**	Tant que P ≤ 100	
10		S_i prend la valeur S_i+I	
11		S_p prend la valeur S_p+P	
12		I prend la valeur I+2	// Ligne à commenter
13		P prend la valeur P+2	// Ligne à commenter
14		Fin du tant que	
15	**Sortie :**	Afficher S_i	
16		Afficher S_p	

a. Commenter les lignes 7-8 et 12-13
b. Quelle condition sur I aurait-on pu mettre à la place de « Tant que P est inférieur à 100 » ?

Partie 2

Leonhard Euler est un mathématicien suisse du XVIIIe siècle considéré comme un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens de tous les temps.
La vue d'Euler empira tout au long de sa vie si bien qu'il savait qu'il finirait ses jours aveugle. Mais pour ne pas laisser ce handicap l'empêcher de faire des mathématiques, il exerça sa mémoire à des exercices qui nous paraissent inhumains. Il pouvait par exemple répéter l'Énéide de Virgile (long poème de 11 000 vers), du début à la fin, sans hésitation, et pour chaque page de son édition, il pouvait citer la première et la dernière ligne.
Durant toute sa carrière (même aveugle), il a publié près de 800 pages de textes scientifiques par an soit au total 75 volumes de 600 pages chacun !

Parmi ces nombreuses études, il s'est penché sur d'étranges calculs comme celui-ci :

$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}+\frac{1\times2\times3\times4}{3\times5\times7\times9}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1\times2\times\ldots\times49\times50}{3\times5\times\ldots\times99\times101}+\ \ldots\ldots\right)$$

Mais qu'est-ce qu'Euler nous a donc caché derrière ce calcul ?

Pour le découvrir, commençons par comprendre comment cette somme a été construite.

1. Continuer la suite logique suivante en écrivant les 3 prochains termes :

$$\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1\times2}{3\times5}\ ;\ \frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}\ ;\ \frac{1\times2\times3\times4}{3\times5\times7\times9}\ ;\ \ldots\ldots$$

2. Donner l'arrondi au centième des calculs suivants :

$$2\left(1+\frac{1}{3}\right)$$
$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}\right)$$
$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}\right)$$
$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}+\frac{1\times2\times3\times4}{3\times5\times7\times9}\right)$$
$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}+\frac{1\times2\times3\times4}{3\times5\times7\times9}+\frac{1\times2\times3\times4\times5}{3\times5\times7\times9\times11}\right)$$

3. En déduire le nombre qu'Euler cherchait à approcher.
   Si vous n'avez pas trouvé ou pour vous rassurer dans votre hypothèse, vous pouvez continuer à calculer d'autres sommes en rajoutant un terme supplémentaire à chaque fois.

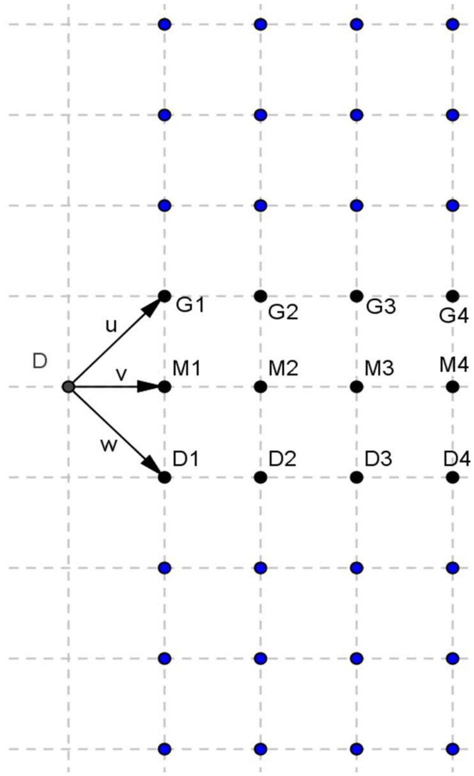
4. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, la somme suivante :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}+\frac{1\times2\times3\times4}{3\times5\times7\times9}+\ \ldots\ldots\ldots\ +\frac{1\times2\times\ldots\times49\times50}{3\times5\times\ldots\times99\times101}$$

Toute méthode suffisamment détaillée sera acceptée.
On pourra par exemple, en s'inspirant de la partie I, proposer un algorithme.

Exercice 4 : 

(Elèves de séries technologiques) 



Partie 1 :

Alice se trouve sur le point D. A chaque pas, elle décide de se déplacer de la façon suivante :

- soit elle avance simplement d'un pas (représenté par la flèche v) ;
- soit elle avance d'un pas en diagonale sur sa gauche (représenté par la flèche u) ;
- soit elle avance d'un pas en diagonale sur sa droite (représenté par la flèche w).

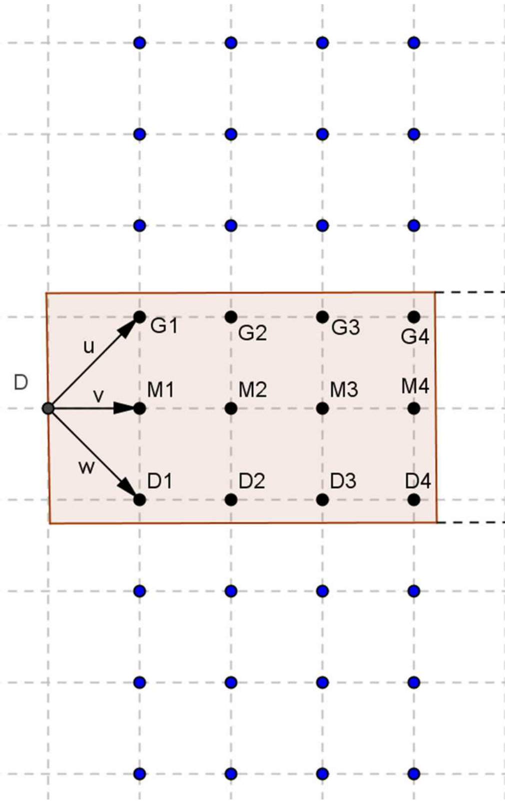
Chacun de ces choix est équiprobable.

Elle recommence de la même manière au pas suivant. Ainsi il y a 3 déplacements possibles de 1 pas et 9 déplacements possibles de 2 pas.

1. En vous aidant de la figure, que vous pouvez compléter, déterminez le nombre de déplacements possibles de 3 pas que peut faire Alice.

2. Combien de déplacements différents de 4 pas peut elle faire ?

Partie 2 :



Au départ (point D), Alice se trouve au début d'un passage piéton représenté par le rectangle grisé sur la figure. Ainsi si Alice part du point D et se déplace deux fois d'un pas en diagonale sur sa gauche (2 flêches u), elle sort du passage piéton.

1. a. Combien de déplacements de 2 pas permettront à Alice de se rendre au point G2 sans sortir du passage piéton ?

b. Même question pour D2 puis pour M2.

Soit n un nombre entier, on note G_n le nombre de déplacements de n pas permettant de se rendre au point Gn sans sortir du passage piéton, D_n le nombre de déplacements de n pas permettant de se rendre au point Dn sans sortir du passage piéton, M_n le nombre de déplacements de n pas permettant de se rendre au point Mn sans sortir du passage piéton et P_n le nombre total de déplacements de n pas ne sortant pas du passage piéton (on a donc $P_n = G_n + M_n + D_n$).

2. a. Calculer G_3, le nombre de déplacements de 3 pas qui permettront à Alice de se rendre au point G3 sans sortir du passage piéton? Vérifier que $G_3=G_2+M_2$ et expliquer pourquoi.

b. Calculer M_3, le nombre de déplacements de 3 pas qui permettront à Alice de se rendre au point M3 sans sortir du passage piéton. (On pourra exprimer M_3 en fonction de M_2, G_2 et D_2)

3. a. Quelle est la probabilité qu'Alice soit toujours sur le passage piéton après 2 pas ?

b. Même question après 3 pas.

4. Sachant que le passage piéton fait 10 pas de long, combien de déplacements permettront à Alice de traverser la rue sans sortir du passage piéton ? Expliquer votre réponse. (Vous pourrez vous aider du tableau proposé ci-dessous)

Nombre n de pas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_n	0	1	2								
M_n	1	1									
D_n	0	1									
P_n	1	3									

5. Quelle est la probabilité qu'Alice réussisse à traverser la rue sans sortir du passage piéton ?

Exercice 4 : Un homme à la mer ! (Elèves de séries générales)

Partie 1 : Un peu d'histoire

1. Une mesure d'angle de 1 degré est subdivisée en 60 minutes. Un mille marin correspond à la longueur d'une minute d'arc de la circonférence méridienne de la Terre.
   Sachant que le rayon moyen de la Terre est d'environ 6 368 km, donner la valeur d'un mille marin arrondie au mètre près.

2. Le nœud est une unité de mesure de la vitesse utilisée en navigation maritime et aérienne. Un nœud correspond à un mille marin par heure, soit 1 852 mètres par heure. On estimait autrefois la vitesse d'un navire à l'aide d'un loch à bateau (voir image ci-contre). La planchette, qu'un marin jetait à l'eau, était amarrée à un cordage comportant des nœuds régulièrement espacés. Le marin laissait glisser la corde entre ses mains et comptait à haute voix les nœuds au fur et à mesure qu'ils passaient entre ses doigts. Le compte se faisait pendant le temps d'écoulement d'un sablier de 30 secondes.

Loch à bateau

   Calculer la distance entre deux nœuds consécutifs du cordage. Arrondir au décimètre près.

Partie 2 : Secours en mer

Un bateau part du port de Southport, dans le sud de la Tasmanie, et navigue vers le Sud à une vitesse de 20 nœuds. Après 4 heures de route, il heurte un objet flottant. Avant que le bateau ne coule, le capitaine a tout juste le temps de contacter les secours pour demander de l'aide. Il indique sa position et précise qu'un fort courant marin les déporte à une vitesse de 10 nœuds vers l'Est. Les naufragés se retrouvent alors dans une eau à 11°C, attendant les sauveteurs.
Il faut ¾ d'heure pour organiser le départ des secours. A cet instant, les secours partent du port en hélicoptère, en ligne droite, de manière à ce que leur trajectoire intercepte celle des naufragés à la dérive. L'hélicoptère vole à une vitesse de 50 nœuds.

Quel sera l'état de santé des naufragés à l'arrivée des secouristes ? (Vous pourrez vous aider d'un schéma)