

## TP - Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler -

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une **fonction  $f$  qui est proportionnelle à sa dérivée  $f'$** . (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)

Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.

Plus particulièrement, que peut-on dire d'une **fonction qui serait égale à sa dérivée** ?

Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

### Première partie (théorique) : de l'importance d'une "condition initiale"

Supposons qu'il existe une fonction  $f$ , non nulle, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On pose  $g = \lambda f$ .

Démontrer que :  $g' = g$  sur  $\mathbb{R}$

2. Soit  $g$  une fonction vérifiant aussi  $g' = g$  sur  $\mathbb{R}$ .

Que peut-on dire de  $f + g$  ?

3. Supposons maintenant qu'il existe une fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions :

$$(P) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a. On considère la fonction  $c$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$c(x) = f(x)f(-x)$$

Montrer que  $c$  est une fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}$ .

En déduire que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

- b. Démontrer que si  $g$  est une fonction qui vérifie (P) alors  $g = f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On pourra considérer la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h = \frac{g}{f}$  ...

Dans la suite, la fonction  $f$  est l'unique fonction<sup>(1)</sup> satisfaisant les conditions

$$(P) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de  $f$  grâce à la méthode d'Euler.

<sup>(1)</sup> On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

Commentaire
On constate dans cette partie que s'il existe une fonction non nulle solution de l'équation différentielle $y' = y$ , alors il en existe une infinité. Cependant, en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$ ), s'il existe une solution à notre équation différentielle, alors elle est unique.

**Deuxième partie (numérique) : vers la représentation graphique**

On rappelle que si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$ , alors il existe une fonction  $\varphi$  telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que  $h$  est petit.

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

1. En utilisant les conditions satisfaites par  $f$ , démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

2. On note  $(u_n)$  la suite définie, sur  $\mathbb{N}$ , par :  $u_n = (1+h)^n f(a)$

Démontrer que  $(u_n)$  est géométrique et préciser sa raison.

3. Dans cette question, on suppose  $a = 0$ . On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

a. On pose  $x = nh$ . Démontrer que pour  $n$  assez grand :

$$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

C'est cette suite  $(u_n(x))$  définie par  $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

Note : cette approximation est d'autant meilleure que  $n$  est grand.

b. A l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), tracer les courbes des approximations de la fonction  $f$  pour des valeurs de  $n$  égales à 10, 100, et 1000.

c. En prenant  $n = 10000$ , donner une valeur approchée du nombre  $f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Note : le nombre  $f(1)$  est encore noté  $e$ . On a déjà vu (DM 2) que  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Voilà. Cette fonction  $f$  vérifiant les conditions  $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$  est appelée **fonction exponentielle**.

On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. Nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des "sommés" en "produits", c'est-à-dire :

$$\text{pour tous réels } x \text{ et } y : f(x+y) = f(x)f(y)$$

Tiens, d'ailleurs, essayez de le montrer en fixant  $y \in \mathbb{R}$  et en considérant la fonction  $g_y$  définie par :

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

Si on arrivait à prouver que  $g_y$  est une fonction constante (égale à  $f(y)$ ) sur  $\mathbb{R}$ , ce serait pas mal non ?

## TP - Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler - Corrigé

### Première partie (théorique) : de l'importance d'une "condition initiale"

Supposons qu'il existe une fonction  $f$ , non nulle, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$f' = f$$

1. On a, sur  $\mathbb{R}$  : 
$$g' = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda f = g$$

D'où : 
$$g' = g \text{ sur } \mathbb{R}$$

2. On a, sur  $\mathbb{R}$  : 
$$(f + g)' - (f + g) = f' - f + g' - g = 0$$

D'où : 
$$(f + g)' = (f + g) \text{ sur } \mathbb{R}$$

La fonction  $f + g$  est aussi égale à sa dérivée.

3. Supposons maintenant qu'il existe une fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions :

$$(P) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a. On considère la fonction  $c$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$c(x) = f(x)f(-x)$$

La fonction  $c$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $f$  l'est) et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$c'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$$

Et puisque  $f' = f$  : 
$$c'(x) = c(x) - c(x) = 0$$

Donc  $c$  est une fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}$ .

Montrons que  $f$  ne s'annule pas (sur  $\mathbb{R}$ ) en raisonnant par l'absurde :

S'il existait un réel  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$ , alors on aurait  $c(x_0) = 0$ , ce qui est absurde puisque  $c = 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc, l'hypothèse initiale est fautive.

Donc  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $c = 1$  sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$$

Cette propriété sera utile par la suite.

b. Comme  $f$  ne s'annule pas, la fonction  $h = \frac{g}{f}$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$h' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0 \text{ puisque } g' = g \text{ et } f' = f$$

Là encore, on en déduit que  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$  et comme :

$$h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$$

$h$  est constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}$ , d'où : 
$$g = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Puisque  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Dans la suite, la fonction  $f$  est l'unique fonction<sup>(1)</sup> satisfaisant les conditions

$$(P) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

## Deuxième partie (numérique) : vers la représentation graphique

On rappelle que si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$ , alors il existe une fonction  $\varphi$  telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que  $h$  est petit.

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

1. On considère la propriété  $\wp$ , définie sur  $\mathbb{N}$ , par :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ et } h \text{ assez petit, } f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

- Comme  $f = f'$ , on a :  $f(a+h) \simeq (1+h)f(a)$   
D'où  $\wp(1)$ . La propriété est donc initialisée au rang 1. (Et même au rang 0)
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et supposons  $\wp(n)$ . Alors :

$$f(a+(n+1)h) = f((a+nh)+h) \stackrel{\wp(1)}{\simeq} (1+h)f(a+nh) \stackrel{\wp(n)}{\simeq} (1+h)^{n+1}f(a)$$

D'où  $\wp(n+1)$ .

La propriété  $\wp$  est donc héréditaire à partir du rang 1.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété  $\wp$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Et comme elle triviale au rang 0, elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

Bien comprendre la portée de cette approximation : si on connaît la valeur de  $f$  en  $a$ , alors on peut calculer des valeurs approchées de  $f$  en  $a+nh$ .

2. On note  $(u_n)$  la suite définie, sur  $\mathbb{N}$ , par :  $u_n = (1+h)^n f(a)$

$$\text{On a, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = (1+h)^{n+1} f(a) = (1+h)(1+h)^n f(a) = (1+h)u_n$$

La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison  $1+h$ .

3. Dans cette question, on suppose  $a = 0$ . On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

a. Puisque  $x = nh$ , on a  $h = \frac{x}{n}$  ( $n$  est supposé assez grand pour avoir  $h$  assez petit).

Ainsi :

$$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

b. Voir feuille suivante.

c. En prenant  $n = 10000$ , on obtient :

$$e \simeq 2,71815$$

C'est cette suite  $(u_n(x))$  définie par  $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

Enfin, montrons que l'exponentielle transforme les sommes en produits :

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

$$g'_y(x) = f'(x+y)f(-x) - f(x+y)f'(-x) = 0 \quad \text{car } f' = f$$

Donc  $g_y$  est constante et comme  $g'_y(0) = f(y)f(0) = f(y)$ , il vient pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(y) = f(x+y)f(-x)$$

Et comme, on vu que  $f(x)f(-x) = 1$ , nous obtenons finalement :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

## Courbes approchant la fonction exponentielle obtenues par la méthode d'Euler

