Étude d'une suite de nombres complexes

Énoncé

On considère la suite (u_n) de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = \mathrm{i} \\ u_{2n} = 1 + \mathrm{i}u_n \\ u_{2n+1} = \mathrm{i} - \mathrm{i}.u_n \end{cases}$$

Partie A

1. Définir cette suite en utilisant un logiciel de calcul numérique ou formel.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.

2. Obtenir le calcul des trente premiers termes de la suite. Quel ensemble de nombres complexes semble parcourir cette suite ?

Partie B

3. *À partir de maintenant, on note* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Obtenir les valeurs de S_{30}, S_{31}, S_{100}, S_{101}, S_{500}, S_{501}, S_{2008} et S_{2009}.
   Quelles conjectures peut-on émettre ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.

Partie B

4. Vérifier que $S_{2n+1} = u_0 + u_1 + \sum_{k=1}^{n} (u_{2k} + u_{2k+1})$.

   Calculer $u_{2k} + u_{2k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$, et en déduire l'expression de S_{2n+1} en fonction de n.
5. On suppose maintenant que $S_{2n} = n + \mathrm{i}n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) En calculant $S_{2n+1} - S_{2n}$, montrer que :
   $u_{2n+1} = \mathrm{i}$ pour tout entier n.

   (b) Que peut-on en conclure sur la conjecture formulée au début de cette question ?
6. En utilisant éventuellement à nouveau le logiciel, examiner ce qu'on peut dire des entiers n tels que $S_{2n} = n + \mathrm{i}n$.

Production demandée

- Définition de la suite (u_n) à partir d'un logiciel de calcul formel.
- Calcul de plusieurs termes et sommes de termes de cette suite .
- Réponses argumentées pour les questions **4.** et **5.**.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 112 2009
« Etude d'une suite … »

Logiciel utilisé : Xcas ou Maple ou …

```
> u[0]:=0;
> u[1]:=I;

> for n from 1 to 1005
> do u[2*n]:= 1+I*u[n]:
> u[2*n+1]:=I-I*u[n]
> od:
> for n from 0 to 30
> do printf(` u%d = %a   `,n,u[n])
> od;
u0 = 0   u1 = I   u2 = 0   u3 = 1+I   u4 = 1   u5 = I   u6 = I   u7 = 1   u8 = 1+I   u9 = 0   u10 = 0   u11 = 1+I   u12 = 0   u13 = 1+I   u14 = 1+I
u15 = 0   u16 = I   u17 = 1   u18 = 1   u19 = I   u20 = 1   u21 = I   u22 = I   u23 = 1   u24 = 1   u25 = I   u26 = I   u27 = 1   u28 = I   u29 = 1
u30 = 1
> S:=0:
> top:=30:
> for n from 0 to top
> do S:=S+u[n]:
> od:
> printf(`           S%d = %a   S%d = %a   `,top,S,top+1,S+u[top+1]);
>
       S30 = 15+15*I    S31 = 15+16*I
> S:=0:
> top:=100:
> for n from 0 to top
> do S:=S+u[n]:
> od:
> printf(`           S%d = %a   S%d = %a   `,top,S,top+1,S+u[top+1]);
          S100 = 50+50*I    S101 = 50+51*I
.....
          S500 = 250+250*I    S501 = 250+251*I
          S2008 = 1004+1004*I    S2009 = 1004+1005*I
```

Mais attention la conjecture est vite mise en défaut !

S2000 = 999+1001*I   S2001 = 1000+1001*I

<u>Conclusion</u> : exercice demandant une bonne maîtrise d'un logiciel de calcul formel, très intéressant, avec des prolongements géométriques.

26/08/2009   Claude Poulin Nouméa