

## Equation différentielle et méthode d'Euler

### Énoncé

Soit l'équation différentielle :  $y' = -2y$ . On admet que la fonction  $f$  solution de cette équation, définie sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $f(0) = 1$  est la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \exp(-2x)$ .

On cherche à comparer  $f(1)$  aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.

On se place sur l'intervalle  $[0, 1]$  en prenant un pas  $h$  égal à  $\frac{1}{n}$ , où  $n$  est un entier supérieur à 2. On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés  $M_k$ , d'abscisse  $x_k$  et d'ordonnée  $y_k$  telles que :

$$x_0 = 0, y_0 = 1, \text{ et pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1, x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n} \text{ et } y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) y_k.$$

Pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $y_k$  est une valeur approchée de  $f(x_k)$ .

- Déterminer l'expression de  $y_k$  en fonction de  $k$  ( $n$  étant une valeur donnée).

Appeler l'examineur pour faire vérifier l'expression obtenue pour  $y_k$ .

- À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de $n$ égale à	$k$	$x_k$	$y_k$
10	0	0	1
Pas égal à	1	0,1	0,8
0,1	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

- En déduire une valeur approchée de  $f(1)$ .

Appeler l'examineur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec  $n = 10$ . Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque  $n = 20$  ou  $n = 30$ .

4. Réitérer la méthode dans les cas  $n = 20$  puis  $n = 30$  et donner les valeurs approchées de  $f(1)$  ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de $n$ égale à	10	20	30	Valeur approchée de $e^{-2}$
Valeur approchée de $y_n$				

5. À l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points  $M_k$  obtenue à la question 4., dans le cas où  $n$  est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

Appeler l'examineur et lui présenter la représentation graphique réalisée.

### Production demandée

- Calcul de  $y_k$  en fonction de  $k$  ;
- Réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur ;
- Détermination de valeurs approchées de  $f(1)$  (tableau rempli) ;
- Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.

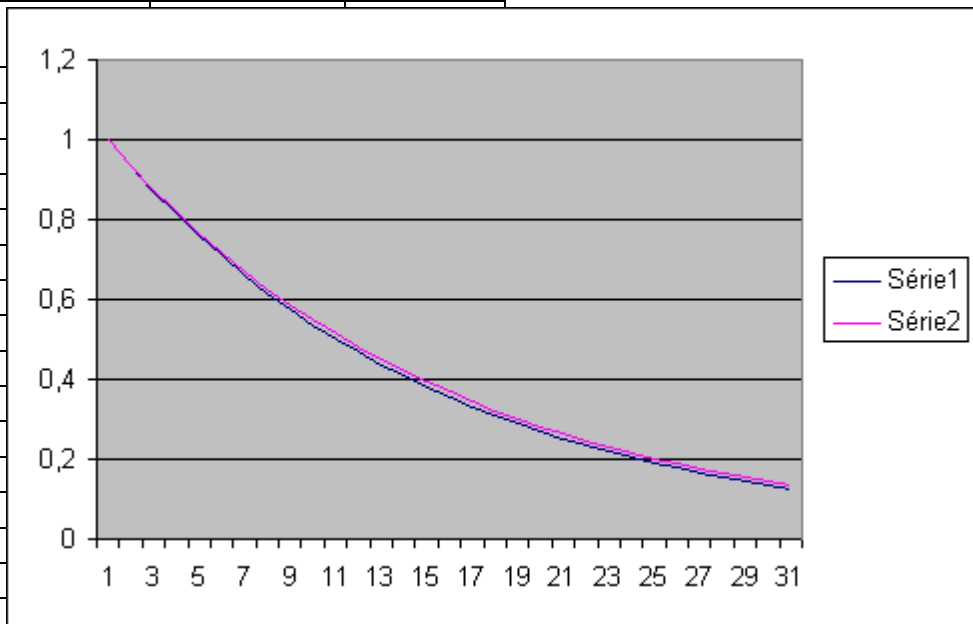
## Quelques commentaires personnels sur la fiche 021 METHODE D'EULER

1)  $y_k = (1 - \frac{2}{n})^k$  géométrique

Les élèves risquent d'être troublés par toutes les notations proposées...

2) facile

n	pas	k	x	y		
30	0,0333	0	0		1	1
		1	0,0333	0,9333333333		0,93550699
		2	0,0667	0,8711111111		0,87517332
		3	0,1	0,813037037		0,81873075
		4	0,1333	0,758834568		0,76592834
		5	0,1667	0,708245597		0,71653131



		23	0,7667	0,204571845	0,21581508
		24	0,8	0,190933722	0,20189652
		25	0,8333	0,178204807	0,1888756
		26	0,8667	0,166324487	0,17669445
		27	0,9	0,155236188	0,16529889
		28	0,9333	0,144887109	0,15463826
		29	0,9667	0,135227968	0,14466518
		30	1	0,12621277	0,13533528

1	=+D2+\$B\$2	=(1-2/\$A\$2)*E2	=+EXP(-2*D3)
2	=+D3+\$B\$2	=(1-2/\$A\$2)*E3	=+EXP(-2*D4)

Conclusion : aucun intérêt : je n'ai pas trouvé de conjecture à montrer, ni vraiment de question mathématiques, mais une simple manipulation d'un tableur ; sujet à reprendre.