Encadrement d'une intégrale

Énoncé

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ On se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Partie A

1. Visualiser la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran et conjecturer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.

   Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

   Appeler l'examinateur pour la vérification du tracé et la validation de la conjecture.

2. Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   (a) Réaliser à l'aide d'un tableur (ou de tout logiciel adapté, voire d'une bonne calculatrice) un tableau de calcul permettant de calculer S_n et T_n pour $n = 100$.

   (b) On admet que pour tout entier naturel non nul n :

   $$S_n \leqslant I \leqslant T_n.$$

   En déduire un encadrement de I et l'amplitude de cet encadrement.

   Appeler l'examinateur pour la vérification des calculs et des résultats.

Partie B

3. (a) Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) Calculer $T_n - S_n$ et justifier l'amplitude de l'encadrement trouvé précédemment.

   (c) Comment pourrait-on faire pour obtenir une approximation de I à $0,0005$ près ?

Production demandée

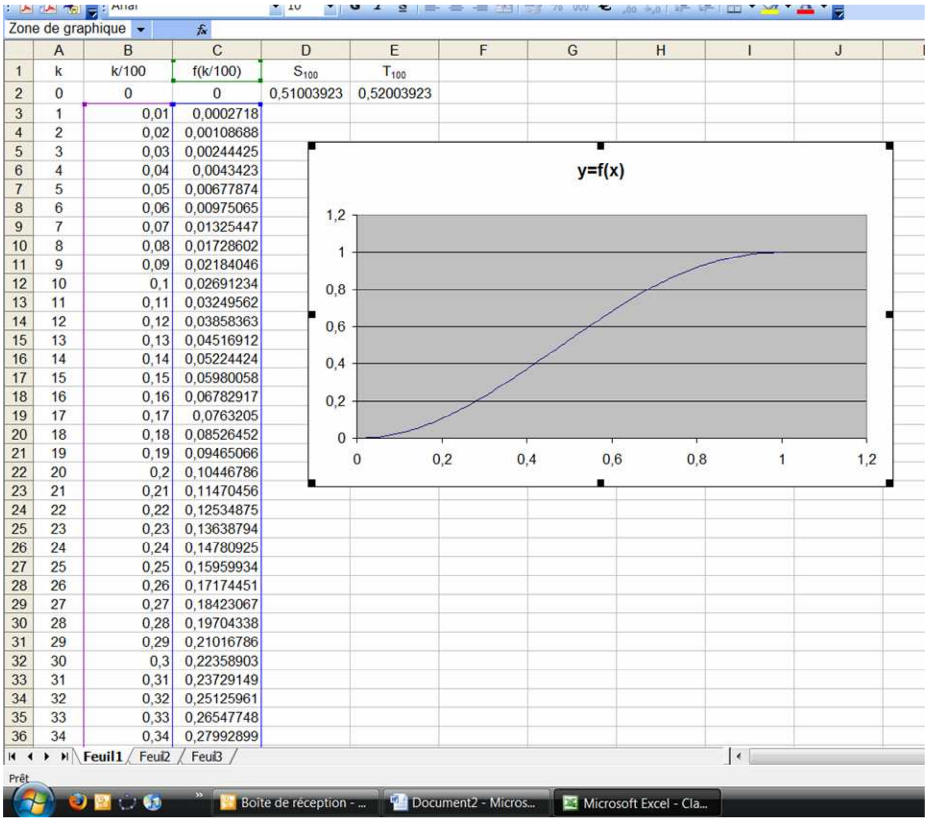
- La courbe tracée à l'écran.
- La visualisation à l'écran de la feuille de calcul réalisée à la question 2.
- Les démonstrations demandées à la question 3.

<u>Quelques commentaires personnels sur la fiche 008 2009</u>
<u>« Encadrement d'une intégrale »</u>

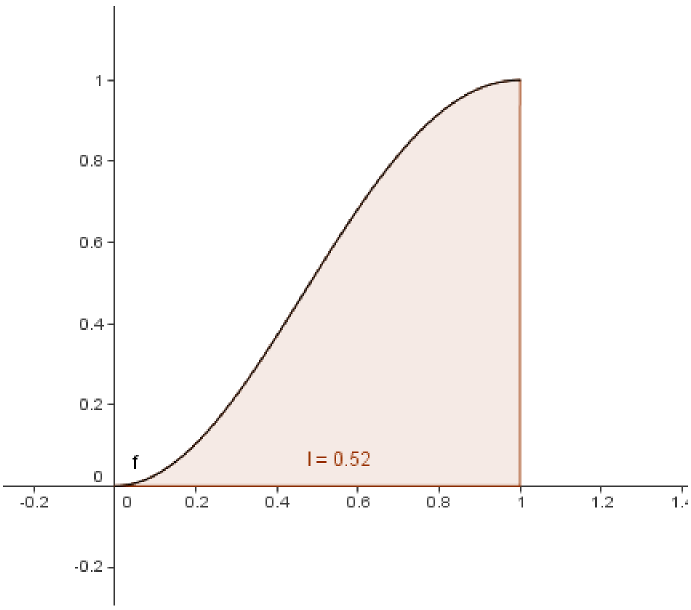
Logiciel utilisé : Excel

Tableur pour figure
+ Sn et Tn pour n=100

D2= (1/100)*SOMME(C2:C101)
E2==(1/100)*SOMME(C3:C102)



	A	B	C	D	E
1	k	k/100	f(k/100)	S_{100}	T_{100}
2	0	0	0	0,51003923	0,52003923
3	1	0,01	0,0002718		
4	2	0,02	0,00108688		
5	3	0,03	0,00244425		
6	4	0,04	0,0043423		
7	5	0,05	0,00677874		
8	6	0,06	0,00975065		
9	7	0,07	0,01325447		
10	8	0,08	0,01728602		
11	9	0,09	0,02184046		
12	10	0,1	0,02691234		
13	11	0,11	0,03249562		
14	12	0,12	0,03858363		
15	13	0,13	0,04516912		
16	14	0,14	0,05224424		
17	15	0,15	0,05980058		
18	16	0,16	0,06782917		
19	17	0,17	0,0763205		
20	18	0,18	0,08526452		
21	19	0,19	0,09465066		
22	20	0,2	0,10446786		
23	21	0,21	0,11470456		
24	22	0,22	0,12534875		
25	23	0,23	0,13638794		
26	24	0,24	0,14780925		
27	25	0,25	0,15959934		
28	26	0,26	0,17174451		
29	27	0,27	0,18423067		
30	28	0,28	0,19704338		
31	29	0,29	0,21016786		
32	30	0,3	0,22358903		
33	31	0,31	0,23729149		
34	32	0,32	0,25125961		
35	33	0,33	0,26547748		
36	34	0,34	0,27992899		



Avec Géogébra …

<u>Conclusion</u> : sujet classique, facile.

28/08/2009 Nathalie Mignot Claude Poulin Nouméa