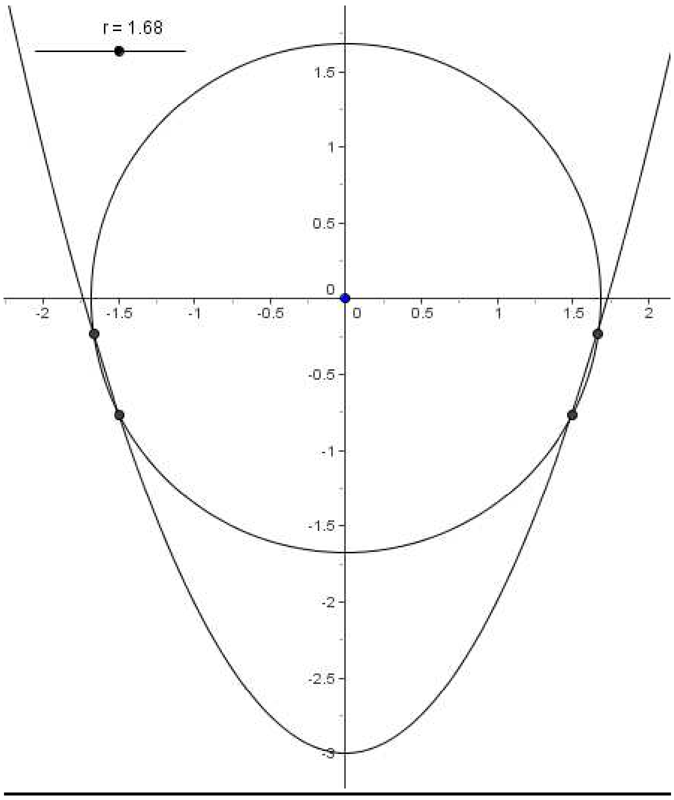
Deux courbes qui se frôlent

Objectif : Il s'agit de déterminer, dans certains cas particuliers, les conditions pour qu'une parabole et un cercle soient tangents l'un à l'autre (c'est-à-dire qu'ils ont un point commun en lequel leurs tangentes respectives sont identiques).

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit r un nombre réel strictement positif. On considère la parabole P d'équation $y = x^2 - 3$ et le cercle C de centre O et de rayon r.

1. Un peu d'exploration.
   (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique construire la parabole P et le cercle C.
   (b) Conjecturer le nombre de points communs à la parabole P et au cercle C en fonction du nombre réel r.
   (c) Donner une valeur approchée du (ou des) rayon(s) r tel(s) que la parabole P et le cercle C soient tangents (c'est-à-dire, se coupent en un point où leurs tangentes sont les mêmes) et donner dans ce cas une valeur approchée des coordonnées des points de tangence observés.
2. **On suppose dans la suite de cette étude que** $0 < r < 3$.
   (a) Écrire un système (S) d'équations vérifié par les coordonnées x et y des points communs à la parabole P et au cercle C lorsqu'ils existent.
   (b) En déduire qu'alors x est solution d'une équation (E) « bicarrée », c'est-à-dire de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$, et pour laquelle on explicitera les valeurs de a, b et c.
3. Discuter du nombre de points d'intersection du cercle et de la parabole lorsque $0 < r < 3$ et faire le lien avec le nombre de solutions de l'équation (E).
   Caractériser les cas de tangence et en déduire la valeur du rayon r, ainsi que les coordonnées des points communs à la parabole P et au cercle C, dans ce cas.

Quelques commentaires personnels sur la fiche « deux courbes qui se frôlent »



GeoGebra :

Les éventuels points d'intersection ont leurs coordonnées qui apparaissent automatiquement dans le cadre numérique (régler l'incrément du curseur)

les deux équations $y = x^2-3$ et $y^2 + x^2 = r^2$ amènent à résoudre $x^4 - 5x^2 + 9 - r^2 = 0$
L'étude du discriminant $4r^2-11$ permet alors de conclure …

Dans l'énoncé on n'étudie pas le cas r=3 , mais ce prolongement est possible.

<u>Conclusion : pas de difficultés particulières, bon TP en 1°S , en relation avec le second degré.</u>

03/07/2008 Claude Poulin Nouméa