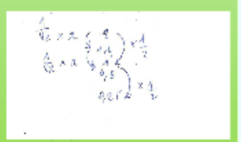
# Les compétences au lycée

## Quelles compétences

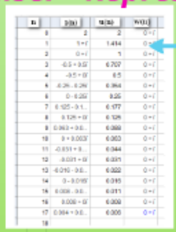
- CHERCHER
- MODELISER
- REPRESENTER
- CALCULER
- RAISONNER
- COMMUNIQUER

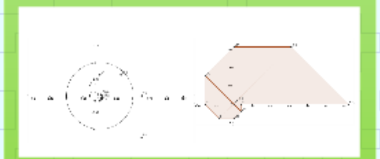
### Observer - conjecturer

la valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel
la nature de la suite r(n)
la limite de la suite r(n)
le rang à partir duquel r(n)<0,1
la nature de la suite w(n)
la nature du triangle OBnBn+1

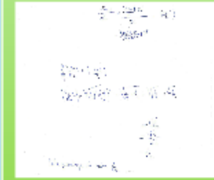


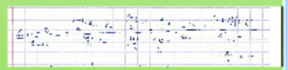
### Modéliser - Représenter



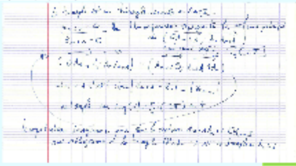


### Calculer

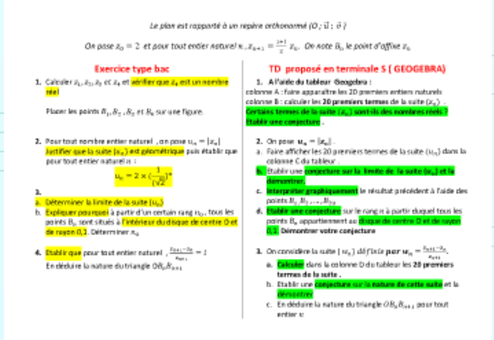




### Raisonner - Communiquer



### 2 énoncés pour un même exercice



*Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$*

*On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note $B_n$ le point d'affixe $z_n$*

**Exercice type bac**

1. Calculer $z_1, z_2, z_3$ et $z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel

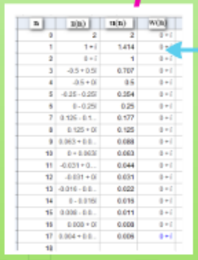
   Placer les points $B_1, B_2, B_3$ et $B_4$ sur une figure.

2. Pour tout nombre entier naturel , on pose $u_n = |z_n|$
   Justifier que la suite $(u_n)$ est géométrique puis établir que pour tout entier naturel $n$ :
   $$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
3. 
   a. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$
   b. Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang $n_0$, tous les points $B_n$ sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Déterminer $n_0$
4. Etablir que pour tout entier naturel , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$
   En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$

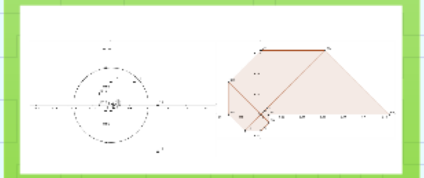
**TD proposé en terminale S ( GEOGEBRA)**

1. **A l'aide du tableur Geogebra :**
   colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels
   colonne B : calculer les **20 premiers termes** de la suite $(z_n)$ .
   **Certains termes de la suite $(z_n)$ sont-ils des nombres réels ? Etablir une conjecture** .
2. On pose $u_n = |z_n|$ .
   a. Faire afficher les 20 premiers termes de la suite $(u_n)$ dans la colonne C du tableur .
   b. Etablir une **conjecture sur la limite de la suite $(u_n)$ et la démontrer.**
   c. **Interpréter graphiquement** le résultat précédent à l'aide des points $B_1, B_2, \ldots, B_{20}$
   d. **Etablir une conjecture** sur le rang $n$ à partir duquel tous les points $B_n$ appartiennent au **disque de centre O et de rayon 0,1. Démontrer votre conjecture**
3. On considère la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.
   a. **Calculer** dans la colonne D du tableur les **20 premiers termes de la suite .**
   b. Etablir une **conjecture sur la nature de cette suite** et la **démontrer**
   c. En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$ pour tout entier $n$

# Modéliser - Représenter

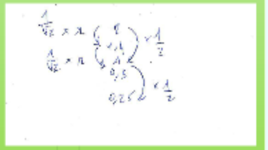


| n | z(n) | r(n) | W(n) |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0 + i |
| 1 | 1 + i | 1.414 | 0 + i |
| 2 | 0 + i | 1 | 0 + i |
| 3 | -0.5 + 0.5i | 0.707 | 0 + i |
| 4 | -0.5 + 0i | 0.5 | 0 + i |
| 5 | -0.25 - 0.25i | 0.354 | 0 + i |
| 6 | 0 - 0.25i | 0.25 | 0 + i |
| 7 | 0.125 - 0.1... | 0.177 | 0 + i |
| 8 | 0.125 + 0i | 0.125 | 0 + i |
| 9 | 0.063 + 0.0... | 0.088 | 0 + i |
| 10 | 0 + 0.063i | 0.063 | 0 + i |
| 11 | -0.031 + 0.... | 0.044 | 0 + i |
| 12 | -0.031 + 0i | 0.031 | 0 + i |
| 13 | -0.016 - 0.0... | 0.022 | 0 + i |
| 14 | 0 - 0.016i | 0.016 | 0 + i |
| 15 | 0.008 - 0.0... | 0.011 | 0 + i |
| 16 | 0.008 + 0i | 0.008 | 0 + i |
| 17 | 0.004 + 0.0... | 0.006 | 0 + i |
| 18 | | | |

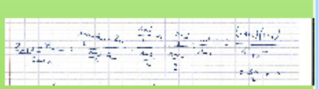


# Observer - conjecturer

les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel
la nature de la suite r(n)
la limite de la suite r(n)
le rang à partir duquel r(n)<0,1
la nature de la suite w(n)
la nature du triangle OBnBn+1



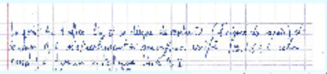
# Calculer

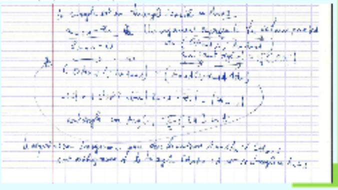


# Quelles compétences

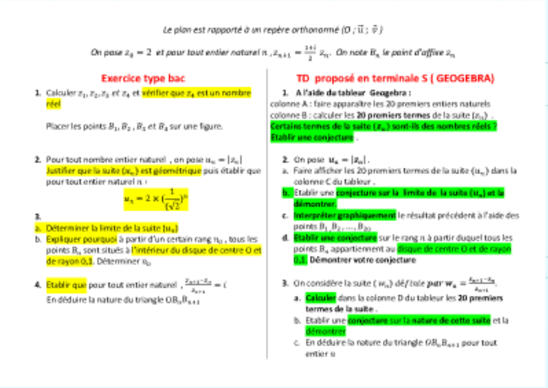
- CHERCHER
- MODELISER
- REPRESENTER
- CALCULER
- RAISONNER
- COMMUNIQUER

## Raisonner - Communiquer





## 2 énoncés pour un même exercice



*Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$*

*On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note $B_n$ le point d'affixe $z_n$*

**Exercice type bac**

1. Calculer $z_1, z_2, z_3$ et $z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel

   Placer les points $B_1, B_2, B_3$ et $B_4$ sur une figure.

2. Pour tout nombre entier naturel, on pose $u_n = |z_n|$
   Justifier que la suite $(u_n)$ est géométrique puis établir que pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
3.
   a. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$
   b. Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang $n_0$, tous les points $B_n$ sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Déterminer $n_0$
4. Etablir que pour tout entier naturel, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$
   En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$

**TD proposé en terminale S ( GEOGEBRA)**

1. **A l'aide du tableur Geogebra :**
   colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels
   colonne B : calculer les **20 premiers termes** de la suite $(z_n)$.
   **Certains termes de la suite $(z_n)$ sont-ils des nombres réels ? Etablir une conjecture.**
2. On pose $u_n = |z_n|$.
   a. Faire afficher les 20 premiers termes de la suite $(u_n)$ dans la colonne C du tableur.
   b. Etablir une **conjecture sur la limite de la suite $(u_n)$ et la démontrer.**
   c. **Interpréter graphiquement** le résultat précédent à l'aide des points $B_1, B_2, \ldots, B_{20}$
   d. **Etablir une conjecture** sur le rang n à partir duquel tous les points $B_n$ appartiennent au **disque de centre O et de rayon 0,1. Démontrer votre conjecture**
3. On considère la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.
   a. **Calculer** dans la colonne D du tableur les **20 premiers termes de la suite**.
   b. Etablir une **conjecture sur la nature de cette suite** et la **démontrer**
   c. En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$ pour tout entier n

# Les compétences au lycée

# *Quelles compétences*

- **CHERCHER**
- **MODELISER**
- **REPRESENTER**
- **CALCULER**
- **RAISONNER**
- **COMMUNIQUER**

# 2 énoncés pour un même exercice

*Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )*

*On pose* $z_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* $n$ , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. *On note* $B_n$ *le point d'affixe* $z_n$

## Exercice type bac

1. Calculer $z_1, z_2, z_3$ $et$ $z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel

   Placer les points $B_1, B_2$ , $B_3$ $et$ $B_4$ sur une figure.

2. Pour tout nombre entier naturel , on pose $u_n = |z_n|$
   Justifier que la suite $(u_n)$ est géométrique puis établir que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = 2 \times (\frac{1}{(\sqrt{2}})^n$$

3.
   a. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$
   b. Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang $n_0$ , tous les points $B_n$ sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Déterminer $n_0$

4. Etablir que pour tout entier naturel , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$
   En déduire la nature du triangle O$B_n B_{n+1}$

## TD proposé en terminale S ( GEOGEBRA)

1. **A l'aide du tableur Geogebra :**

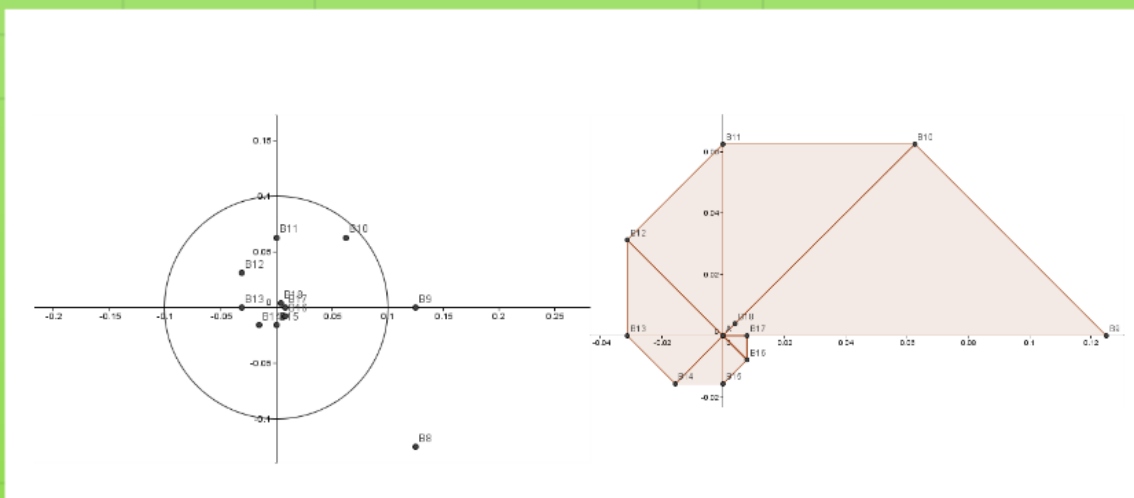
colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels
colonne B : calculer les **20 premiers termes** de la suite $(z_n)$ .
**Certains termes de la suite $(z_n)$ sont-ils des nombres réels ? Etablir une conjecture .**

2. On pose $\boldsymbol{u_n} = |\boldsymbol{z_n}|$ .
   a. Faire afficher les 20 premiers termes de la suite $(u_n)$ dans la colonne C du tableur .
   **b.** Etablir une **conjecture sur la limite de la suite $(u_n)$ et la démontrer.**
   **c.** **Interpréter graphiquement** le résultat précédent à l'aide des points $B_1$ , $B_2$ , … , $B_{20}$
   **d.** **Etablir une conjecture** sur le rang $n$ à partir duquel tous les points $B_n$ appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1. **Démontrer votre conjecture**

3. On considère la suite ( $w_n$) $définie$ $\boldsymbol{par}$ $\boldsymbol{w_n} = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.
   **a.** **Calculer** dans la colonne D du tableur les **20 premiers termes de la suite .**
   b. Etablir une **conjecture** sur la **nature de cette suite** et la démontrer
   c. En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$ pour tout entier $n$

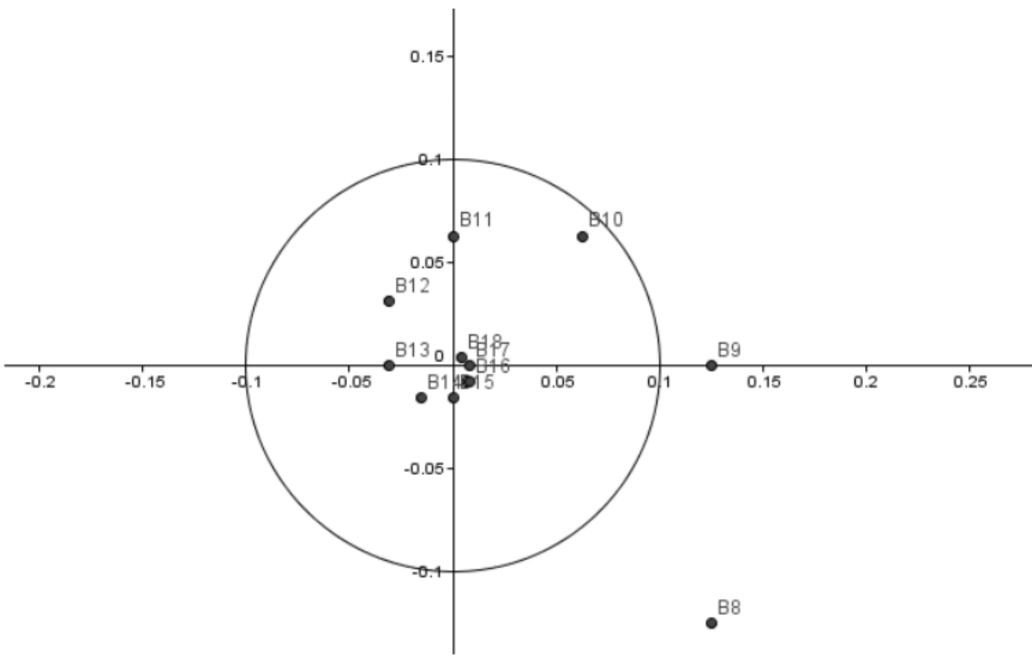
# Modéliser - Représenter

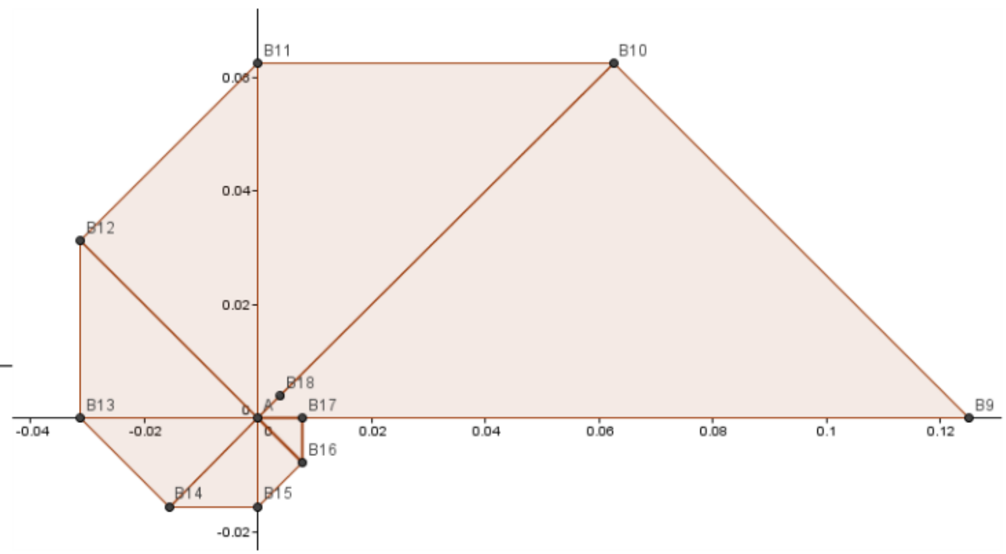
| n | z(n) | u(n) | w(n) |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0 + í |
| 1 | 1 + í | 1.414 | 0 + |
| 2 | 0 + í | 1 | 0 + í |
| 3 | -0.5 + 0.5í | 0.707 | 0 + í |
| 4 | -0.5 + 0í | 0.5 | 0 + í |
| 5 | -0.25 - 0.25í | 0.354 | 0 + í |
| 6 | 0 - 0.25í | 0.25 | 0 + í |
| 7 | 0.125 - 0.1... | 0.177 | 0 + í |
| 8 | 0.125 + 0í | 0.125 | 0 + í |
| 9 | 0.063 + 0.0... | 0.088 | 0 + í |
| 10 | 0 + 0.063í | 0.063 | 0 + í |
| 11 | -0.031 + 0.... | 0.044 | 0 + í |
| 12 | -0.031 + 0í | 0.031 | 0 + í |
| 13 | -0.016 - 0.0... | 0.022 | 0 + í |
| 14 | 0 - 0.016í | 0.016 | 0 + í |
| 15 | 0.008 - 0.0... | 0.011 | 0 + í |
| 16 | 0.008 + 0í | 0.008 | 0 + í |
| 17 | 0.004 + 0.0... | 0.006 | 0 + í |
| 18 | | | |



| n | z(n) | u(n) | w(n) |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0 + í |
| 1 | 1 + í | 1.414 | 0 + í |
| 2 | 0 + í | 1 | 0 + í |
| 3 | -0.5 + 0.5í | 0.707 | 0 + í |
| 4 | -0.5 + 0í | 0.5 | 0 + í |
| 5 | -0.25 - 0.25í | 0.354 | 0 + í |
| 6 | 0 - 0.25í | 0.25 | 0 + í |
| 7 | 0.125 - 0.1... | 0.177 | 0 + í |
| 8 | 0.125 + 0í | 0.125 | 0 + í |
| 9 | 0.063 + 0.0... | 0.088 | 0 + í |
| 10 | 0 + 0.063í | 0.063 | 0 + í |
| 11 | -0.031 + 0.... | 0.044 | 0 + í |
| 12 | -0.031 + 0í | 0.031 | 0 + í |
| 13 | -0.016 - 0.0... | 0.022 | 0 + í |
| 14 | 0 - 0.016í | 0.016 | 0 + í |
| 15 | 0.008 - 0.0... | 0.011 | 0 + í |
| 16 | 0.008 + 0í | 0.008 | 0 + í |
| 17 | 0.004 + 0.0... | 0.006 | 0 + í |
| 18 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 0.008 + 0í | 0.008 | 0 + í |
| 17 | 0.004 + 0.0... | 0.006 | 0 + í |
| 18 | | | |



# *Observer - conjecturer*

**les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel**

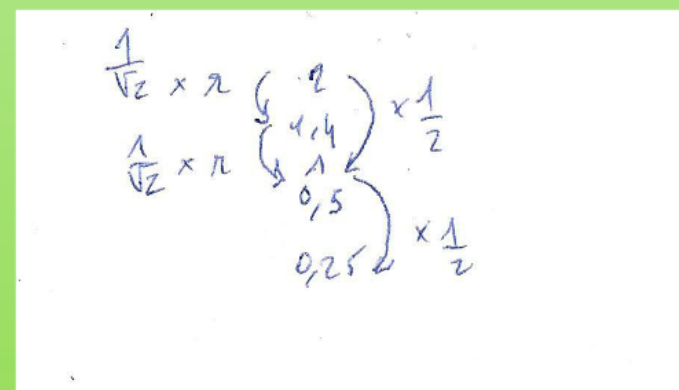
**la nature de la suite r(n)**

**la limite de la suite r(n)**

**le rang à partir duquel r(n)<0,1**

**la nature de la suite w(n)**

**la nature du triangle OBnBn+1**




# *Quelles compétences*

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$

$2$

$1{,}4$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$

$1$

$0{,}5$

$0{,}25$

$\times \frac{1}{2}$

$\times \frac{1}{2}$

# Calculer

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{(1+i)}{2} \times z_n}{z_n} = \left(\frac{1+i}{2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{(1+i)}{2} z_n \times}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \left|\frac{1+i}{2}\right|$$

$$\left|\frac{r_{n+1}}{r_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{\frac{1+1}{2}} = \frac{\frac{-1+i}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{1^2 + i^2}$$

$$= \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{(1+i)}{2} \times z_n}{z_n} = \left(\frac{1+i}{2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{(1+i)}{2} z_n \times}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \left| \frac{1+i}{2} \right|$$

$$\left|\frac{r_{n+1}}{r_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suite geometrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$

# icuier

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2}z_n - z_n}{\frac{1+i}{2}z_n} = \frac{\frac{1+i}{2}-1}{\frac{1+1}{2}} = \frac{\frac{-1+i}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{1^2+i^2}$$

$$= \frac{2i}{2} = i$$

# Raisonner - Communiquer

Le point $A_n$ d'affixe $z_n \in$ au disque de centre O (l'origine du repère) et de rayon 0,1 si et seulement si son affixe vérifie $|z_n| \leq 0,1$ cela revient à tranver n tel que $U_n \leq 0,1$

Le triangle est un triangle isocèle en $A_{n+1}$

$\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$ Un argument représente la valeur principal de $(\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}})$ qui vaut $\arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$(\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = (\overrightarrow{A_{n+1}O} ; \overrightarrow{A_{n+1}A_n})$

$= |i| = 1$ c'est à dire $|z_{n+1} - z_n| = |z_{n+1}|$

rectangle car $\arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ en A

Le coefficient imaginaire pure donc les vecteurs $A_{n+1}A_n$ et $OA_{n+1}$ sont orthogonaux et le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_{n+1}$

# Raisonner - Comm

Le point $A_n$ d'affixe $z_n$ $\in$ au disque de centre O (l'origine du repère) et de rayon 0,1 si et seulement si son affixe vérifie $|z_n| \le 0{,}1$ cela revient à trouver n tel que $U_n \le 0{,}1$

Le triangle est un

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$$

$(\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$

vérifie $|z_n| \leq 0,1$ cela

Le triangle est un triangle isocèle en $A_{n+1}$

$\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$ Un argument représente la valeur principale de $(\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$

qui vaut $\arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$(\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = (\overrightarrow{A_{n+1} O} ; \overrightarrow{A_{n+1} A_n})$

$= |i| = 1$ c'est à dire $|z_{n+1} - z_n| = |z_{n+1}|$

rectangle car $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ en A

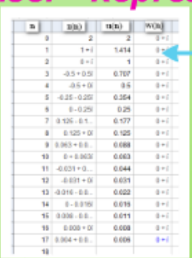
Le rapport est un imaginaire pur donc les vecteurs $A_{n+1}A_n$ et $OA_{n+1}$ sont orthogonaux et le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_{n+1}$

# Les compétences au lycée

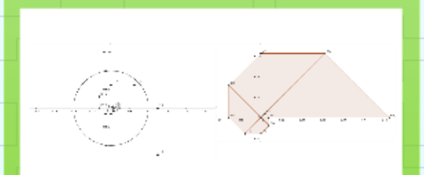
## Quelles compétences

- CHERCHER
- MODELISER
- REPRESENTER
- CALCULER
- RAISONNER
- COMMUNIQUER

## Modéliser - Représenter

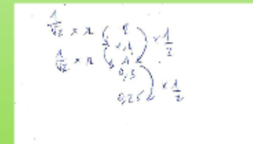


| n | z(n) | r(n) | w(n) |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0 + i |
| 1 | 1 + i | 1.414 | 0 + i |
| 2 | 0 + i | 1 | 0 + i |
| 3 | -0.5 + 0.5i | 0.707 | 0 + i |
| 4 | -0.5 + 0i | 0.5 | 0 + i |
| 5 | -0.25 - 0.25i | 0.354 | 0 + i |
| 6 | 0 - 0.25i | 0.25 | 0 + i |
| 7 | 0.125 - 0.1... | 0.177 | 0 + i |
| 8 | 0.125 + 0i | 0.125 | 0 + i |
| 9 | 0.063 + 0.0... | 0.088 | 0 + i |
| 10 | 0 + 0.063i | 0.063 | 0 + i |
| 11 | -0.031 + 0... | 0.044 | 0 + i |
| 12 | -0.031 + 0i | 0.031 | 0 + i |
| 13 | -0.016 - 0.0... | 0.022 | 0 + i |
| 14 | 0 - 0.016i | 0.016 | 0 + i |
| 15 | 0.008 - 0.0... | 0.011 | 0 + i |
| 16 | 0.008 + 0i | 0.008 | 0 + i |
| 17 | 0.004 + 0.0... | 0.006 | 0 + i |
| 18 | | | |

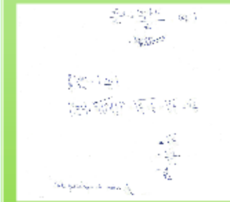


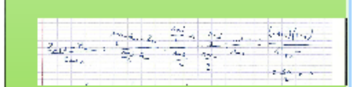
## Observer - conjecturer

les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel
la nature de la suite r(n)
la limite de la suite r(n)
le rang à partir duquel r(n)<0,1
la nature de la suite w(n)
la nature du triangle OBnBn+1

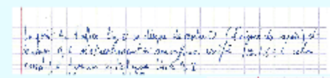


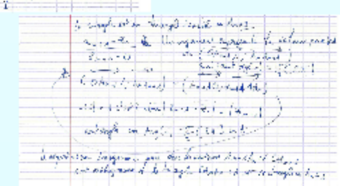
## Calculer



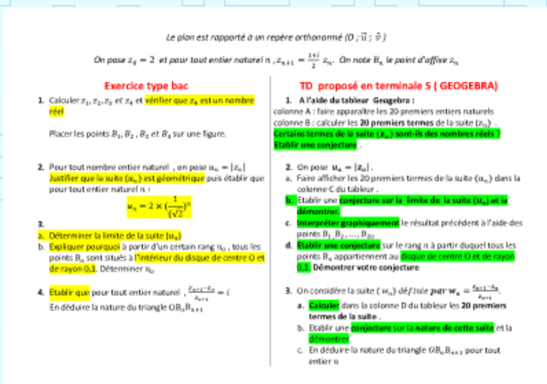


## Raisonner - Communiquer





## 2 énoncés pour un même exercice



*Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$*

*On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note $B_n$ le point d'affixe $z_n$*

**Exercice type bac**

1. Calculer $z_1, z_2, z_3$ et $z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel

   Placer les points $B_1, B_2, B_3$ et $B_4$ sur une figure.

2. Pour tout nombre entier naturel , on pose $u_n = |z_n|$
   Justifier que la suite $(u_n)$ est géométrique puis établir que pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3.
   a. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$
   b. Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang $n_0$ , tous les points $B_n$ sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Déterminer $n_0$

4. Etablir que pour tout entier naturel , $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$
   En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$

**TD proposé en terminale S ( GEOGEBRA)**

1. **A l'aide du tableur Geogebra :**
   colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels
   colonne B : calculer les **20 premiers termes** de la suite $(z_n)$ .
   **Certains termes de la suite $(z_n)$ sont-ils des nombres réels ? Etablir une conjecture** .

2. On pose $u_n = |z_n|$ .
   a. Faire afficher les 20 premiers termes de la suite $(u_n)$ dans la colonne C du tableur .
   b. Etablir une **conjecture sur la limite de la suite $(u_n)$ et la démontrer.**
   c. **Interpréter graphiquement** le résultat précédent à l'aide des points $B_1, B_2, ..., B_{20}$
   d. **Etablir une conjecture** sur le rang n à partir duquel tous les points $B_n$ appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1. **Démontrer votre conjecture**

3. On considère la suite ( $w_n$) définie par $w_n = \frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.
   a. **Calculer** dans la colonne D du tableur les **20 premiers termes de la suite** .
   b. Etablir une conjecture sur la nature de cette suite et la démontrer
   c. En déduire la nature du triangle $OB_nB_{n+1}$ pour tout entier n

# *Observer - conjecturer*

**les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel**

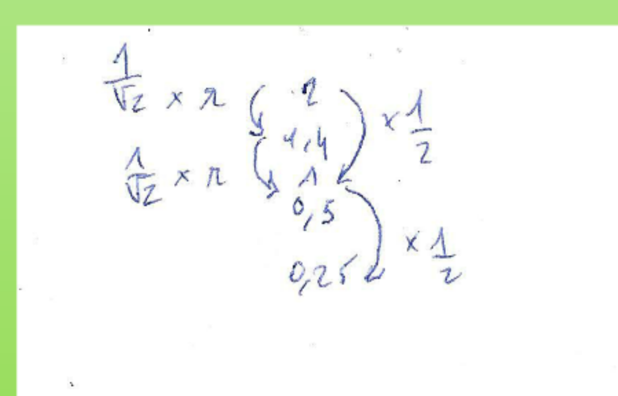
**la nature de la suite r(n)**

**la limite de la suite r(n)**

**le rang à partir duquel r(n)<0,1**

**la nature de la suite w(n)**

**la nature du triangle OBnBn+1**




# *Quelles compétences*