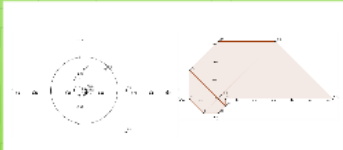


Modéliser - Représenter

n	z(n)	w(n)	W(n)
1	1.414	0.707	0.707
2	0.707	0.354	0.354
3	0.354	0.177	0.177
4	0.177	0.088	0.088
5	0.088	0.044	0.044
6	0.044	0.022	0.022
7	0.022	0.011	0.011
8	0.011	0.005	0.005
9	0.005	0.003	0.003
10	0.003	0.001	0.001
11	0.001	0.000	0.000
12	0.000	0.000	0.000
13	0.000	0.000	0.000
14	0.000	0.000	0.000
15	0.000	0.000	0.000
16	0.000	0.000	0.000
17	0.000	0.000	0.000
18	0.000	0.000	0.000

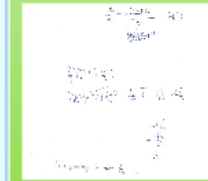


Observer - conjecturer

- les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel
- la nature de la suite r(n)
- la limite de la suite r(n)
- le rang à partir duquel r(n) < 0,1
- la nature de la suite w(n)
- la nature du triangle OB_nB_{n+1}



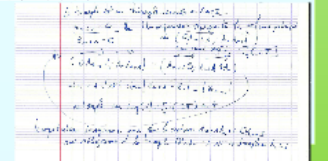
Calculer



Quelles compétences

- CHERCHER
- MODELISER
- REPRESENTER
- CALCULER
- RAISONNER
- COMMUNIQUER

Raisonner - Communiquer



2 énoncés pour un même exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; i; j)

On pose $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$. On note B_n le point d'abscisse a_n .

Exercice type bac

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 et **conjecturer** a_n **en un seul coup**.

Placer les points B_0, B_1, B_2 et B_3 sur une figure.

2. Pour tout nombre entier naturel n , on pose $u_n = |a_n|$. **Justifier** que la suite (u_n) est **généralisée** puis établir que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. **Justifier** que pour tout entier naturel n , $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. En déduire la nature du triangle OB_nB_{n+1} .

TD proposé en terminale S (GEOGEBRA)

1. Affaire de tableau dynamique :

colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels

colonne B : calculer les 20 premiers termes de la suite (a_n)

Conjecturer la nature de la suite (a_n) **en un seul coup**.

2. On pose $u_n = |a_n|$.

a. Faire apparaître les 20 premiers termes de la suite (u_n) dans la colonne C du tableau.

b. **Justifier** que $u_n = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}}$ **en un seul coup**.

c. Déterminer **numériquement** le résultat précédent à l'aide des points B_0, B_1, B_2, B_3 .

d. **Justifier** que le triangle OB_nB_{n+1} est rectangle en B_n **en un seul coup** **et** **en un seul coup** **en déduire** la nature du triangle OB_nB_{n+1} **en un seul coup**.

3. On considère la suite (u_n) de l'exercice 2.

a. **Justifier** que la colonne D du tableau les 20 premiers termes de la suite.

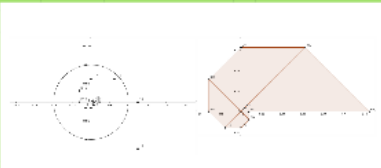
b. **Justifier** que $u_n = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}}$ **en un seul coup** **et** **en un seul coup** **en déduire** la nature du triangle OB_nB_{n+1} **en un seul coup**.

c. En déduire la nature du triangle OB_nB_{n+1} **en un seul coup**.

Les compétences au lycée

Modéliser - Représenter

n	r(n)	w(n)	W(n)
0	1	1	1
1	1	1	1
2	0.5	1	1
3	-0.5	0.5	0.5
4	0	0.5	0.5
5	0.25	0.25	0.25
6	0	0.25	0.25
7	0.125	0.125	0.125
8	0	0.125	0.125
9	0.0625	0.0625	0.0625
10	0	0.0625	0.0625
11	0.03125	0.03125	0.03125
12	0	0.03125	0.03125
13	0.015625	0.015625	0.015625
14	0	0.015625	0.015625
15	0.0078125	0.0078125	0.0078125
16	0	0.0078125	0.0078125
17	0.00390625	0.00390625	0.00390625
18	0	0.00390625	0.00390625
19	0.001953125	0.001953125	0.001953125
20	0	0.001953125	0.001953125



Observer - conjecturer

- les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel
- la nature de la suite r(n)
- la limite de la suite r(n)
- le rang à partir duquel r(n) < 0,1
- la nature de la suite w(n)
- la nature du triangle OBnBn+1

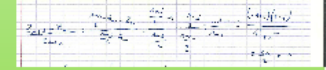
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Calculer

$$r(n) = \frac{1}{2^n}$$

$$w(n) = \frac{1}{2^n}$$



Quelles compétences

- CHERCHER
- MODELISER
- REPRESENTER
- CALCULER
- RAISONNER
- COMMUNIQUER

Raisonner - Communiquer

Le point de l'axe des ordonnées est un entier naturel. Il s'agit de montrer que le triangle est isocèle.

La conjecture est que le triangle est isocèle. On va montrer que les deux côtés sont égaux. On a $OB_n = \frac{1}{2^n}$ et $OB_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$. On va montrer que $OB_n = 2 \times OB_{n+1}$.

2 énoncés pour un même exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{z_n}{2}$. On note B_n le point d'affixe z_n .

Exercice type bac

- Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifier que z_n est un nombre réel.
Placer les points B_0, B_1, B_2 et B_3 sur une figure.
- Pour tout nombre entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.
Vérifier que la suite (u_n) est géométrique puis établir que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times \frac{1}{2^n}$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang u_n , tous les points B_n sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Déterminer n_0 .
- Établir que pour tout entier naturel n , $\frac{z_n - z_{n+1}}{z_n} = 1 - \frac{1}{2}$.
En déduire la nature du triangle $OB_n B_{n+1}$.

TD proposé en terminale S (GEOGEBRA)

- A l'aide du tableur Geogebra :
a. Faire apparaître les 20 premiers entiers naturels dans la colonne A ; calculer les 20 premiers termes de la suite (z_n) .
b. Calculer les termes de la suite (u_n) dans la colonne B.
c. Établir une conjecture sur la limite de la suite (u_n) et la démontrer.
- On pose $u_n = |z_n|$.
a. Faire apparaître les 20 premiers termes de la suite (u_n) dans la colonne C du tableur.
b. Établir une conjecture sur la limite de la suite (u_n) et la démontrer.
- On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{z_n - z_{n+1}}{z_n}$.
a. Faire apparaître dans la colonne D du tableur les 20 premiers termes de la suite (u_n) .
b. Établir une conjecture sur la nature de cette suite et la démontrer.
c. On détermine la nature du triangle $OB_n B_{n+1}$ pour tout entier n .

Les compétences au lycée

Quelles compétences

- **CHERCHER**
- **MODELISER**
- **REPRESENTER**
- **CALCULER**
- **RAISONNER**
- **COMMUNIQUER**

2 énoncés pour un même exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note B_n le point d'affixe z_n

Exercice type bac

1. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel

Placer les points B_1, B_2, B_3 et B_4 sur une figure.

2. Pour tout nombre entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$. Justifier que la suite (u_n) est géométrique puis établir que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3.
 - a. Déterminer la limite de la suite (u_n)
 - b. Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang n_0 , tous les points B_n sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon $0,1$. Déterminer n_0
4. Établir que pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$
En déduire la nature du triangle $OB_n B_{n+1}$

TD proposé en terminale S (GEOGEBRA)

1. A l'aide du tableur Geogebra :

colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels

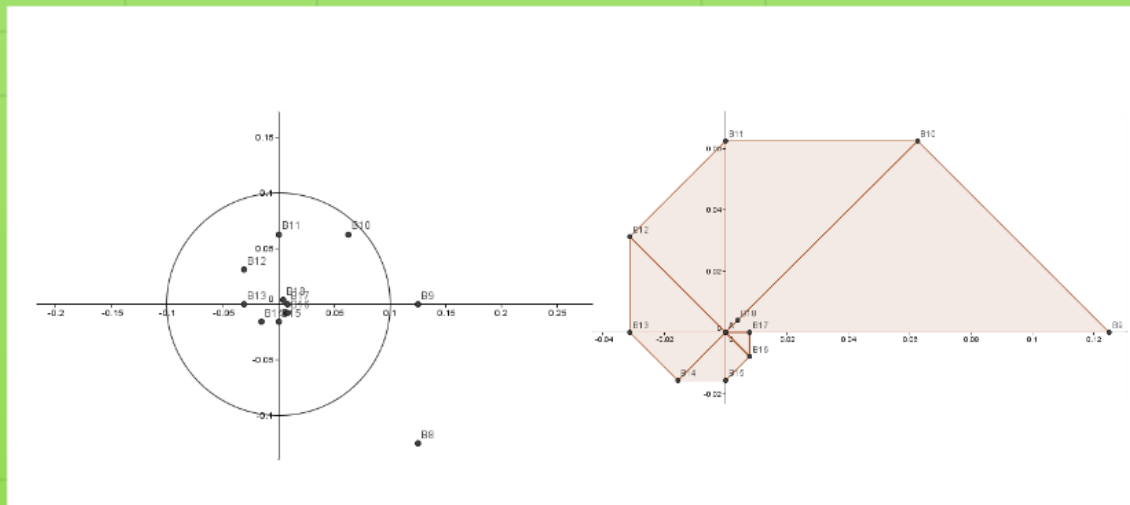
colonne B : calculer les 20 premiers termes de la suite (z_n) .

Certains termes de la suite (z_n) sont-ils des nombres réels ?
Établir une conjecture.

2. On pose $u_n = |z_n|$.
 - a. Faire afficher les 20 premiers termes de la suite (u_n) dans la colonne C du tableur.
 - b. Établir une conjecture sur la limite de la suite (u_n) et la démontrer.
 - c. Interpréter graphiquement le résultat précédent à l'aide des points B_1, B_2, \dots, B_{20}
 - d. Établir une conjecture sur le rang n à partir duquel tous les points B_n appartiennent au disque de centre O et de rayon $0,1$. Démontrer votre conjecture
3. On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.
 - a. Calculer dans la colonne D du tableur les 20 premiers termes de la suite.
 - b. Établir une conjecture sur la nature de cette suite et la démontrer
 - c. En déduire la nature du triangle $OB_n B_{n+1}$ pour tout entier n

Modéliser - Représenter

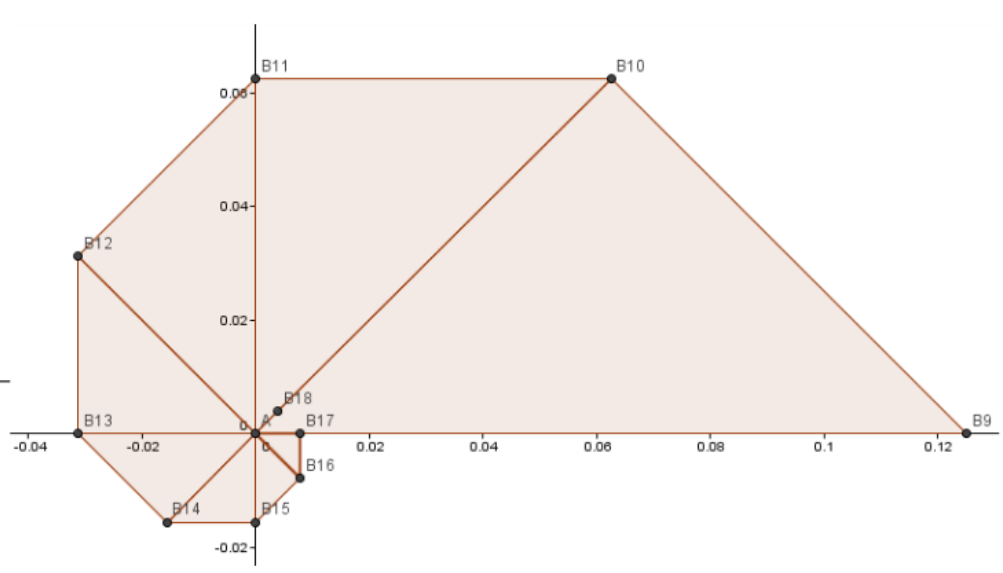
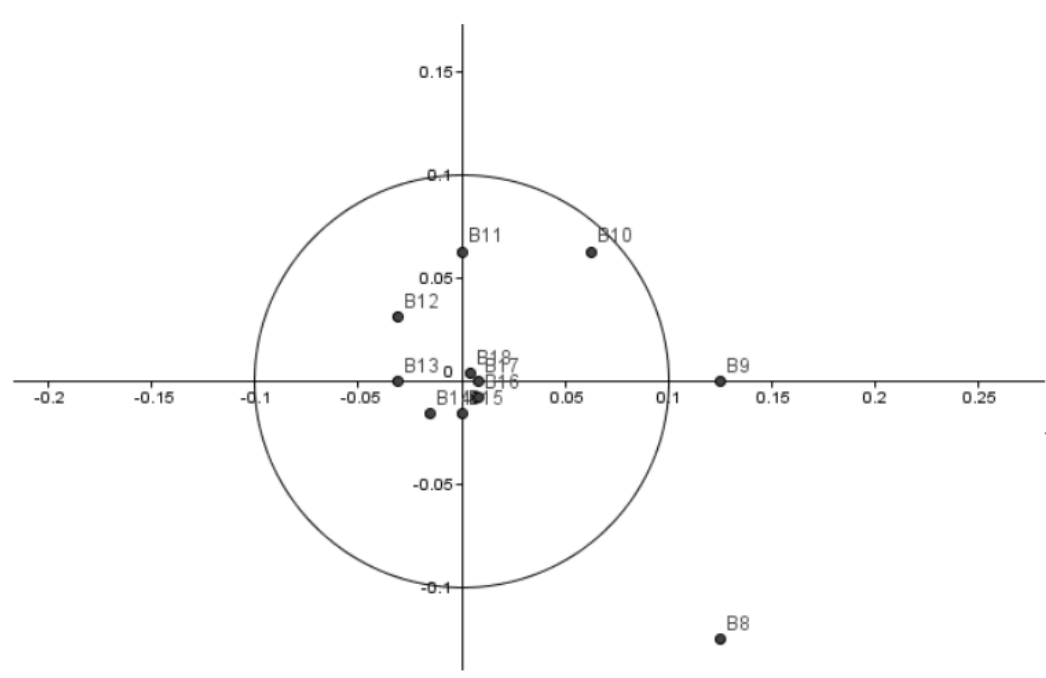
n	z(n)	u(n)	w(n)
0	2	2	0 + i
1	1 + i	1.414	0 + i
2	0 + i	1	0 + i
3	-0.5 + 0.5i	0.707	0 + i
4	-0.5 + 0i	0.5	0 + i
5	-0.25 - 0.25i	0.354	0 + i
6	0 - 0.25i	0.25	0 + i
7	0.125 - 0.1...	0.177	0 + i
8	0.125 + 0i	0.125	0 + i
9	0.063 + 0.0...	0.088	0 + i
10	0 + 0.063i	0.063	0 + i
11	-0.031 + 0....	0.044	0 + i
12	-0.031 + 0i	0.031	0 + i
13	-0.016 - 0.0...	0.022	0 + i
14	0 - 0.016i	0.016	0 + i
15	0.008 - 0.0...	0.011	0 + i
16	0.008 + 0i	0.008	0 + i
17	0.004 + 0.0...	0.006	0 + i
18			



n	z(n)	u(n)	w(n)
0	2	2	$0 + i$
1	$1 + i$	1.414	$0 + i$
2	$0 + i$	1	$0 + i$
3	$-0.5 + 0.5i$	0.707	$0 + i$
4	$-0.5 + 0i$	0.5	$0 + i$
5	$-0.25 - 0.25i$	0.354	$0 + i$
6	$0 - 0.25i$	0.25	$0 + i$
7	$0.125 - 0.125i$	0.177	$0 + i$
8	$0.125 + 0i$	0.125	$0 + i$
9	$0.063 + 0.063i$	0.088	$0 + i$
10	$0 + 0.063i$	0.063	$0 + i$
11	$-0.031 + 0.031i$	0.044	$0 + i$
12	$-0.031 + 0i$	0.031	$0 + i$
13	$-0.016 - 0.016i$	0.022	$0 + i$
14	$0 - 0.016i$	0.016	$0 + i$
15	$0.008 - 0.008i$	0.011	$0 + i$
16	$0.008 + 0i$	0.008	$0 + i$
17	$0.004 + 0.004i$	0.006	$0 + i$
18			



16	$0.008 + 0i$	0.008	$0 + i$
17	$0.004 + 0.0...$	0.006	$0 + i$
18			



Observer - conjecturer

les valeurs de n pour lesquelles $z(n)$ est réel

la nature de la suite $r(n)$

la limite de la suite $r(n)$

le rang à partir duquel $r(n) < 0,1$

la nature de la suite $w(n)$

la nature du triangle OB_nB_{n+1}

Handwritten calculations showing a sequence of values: 2 , 1.4 , 1 , 0.5 , 0.25 . Brackets indicate multiplication by $\frac{1}{2}$ between 2 and 1.4 , and between 1 and 0.5 . The value 0.25 is also shown with a multiplication by $\frac{1}{2}$.

Quelles compétences

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$$

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 4,4 \\ 1 \\ 0,5 \end{array} \right) \times \frac{1}{2}$$
$$\left(\begin{array}{c} 0,25 \\ 0,25 \end{array} \right) \times \frac{1}{2}$$

Calculer

$$\frac{z_{m+1}}{z_m} = \frac{(1+i)z_m}{z_m} = \left(\frac{1+i}{1}\right)$$

~~$= \frac{(1+i)z_m}{z_m}$~~

$$\left| \frac{z_{m+1}}{z_m} \right| = \left| \frac{1+i}{1} \right|$$

$$\left| \frac{z_{m+1}}{z_m} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{\frac{1}{1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1/2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1/2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1/2}}$$

Suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{z_{m+1} - z_m}{z_{m+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_m - z_m}{\frac{1+i}{2} z_m} = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{1^2 + 1} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(1+i)z_n}{z_n} = \left(\frac{1+i}{2}\right)$$

~~$= \frac{(1+i)z_n}{z_n}$~~

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \left| \frac{1+i}{2} \right|$$

$$\left| \frac{r_{n+1}}{r_n} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_{m+1} - z_m}{z_{m+1}} &= \frac{\frac{1+i}{2} z_m - z_m}{\frac{1+i}{2} z_m} = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-\frac{1+i}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1-i}{1+i} = \frac{(-1-i)(1-i)}{1^2 + i^2} \\
 &= \frac{2i}{2} = i
 \end{aligned}$$

Raisonner - Communiquer

Le point A_n d'affixe z_n est au disque de centre O (l'origine du repère) et de rayon $0,5$ si et seulement si son affixe vérifie $|z_n| \leq 0,5$ cela revient à trouver n tel que $U_n \leq 0,5$

Le triangle est un triangle isocèle en A_{n+1}

$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$ Un argument représente la valeur principale de $(\vec{OA_{n+1}}; \vec{A_n A_{n+1}})$ qui vaut $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$

$$\angle (OA_{n+1}; A_n A_{n+1}) = (A_{n+1}O; A_n A_{n+1} A_n)$$

$$= (i) = \frac{\pi}{2} \text{ (nt à être)} \quad |z_{n+1} - z_n| = |z_{n+1}|$$

rectangle car $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$ en A

Le argument imaginaire prouve donc les vecteurs $A_{n+1}A_n$ et OA_{n+1} sont orthogonaux et le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}

Raisonner - Comm

Le point A_n d'affixe z_n est au disque de centre O (l'origine du repère) et de rayon $0,1$ si et seulement si son affixe vérifie $|z_n| \leq 0,1$ cela revient à trouver n tel que $U_n \leq 0,1$

Le triangle est un

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$$

$\longrightarrow \longrightarrow$
 $(O A_{n+1}; A_n A_{n+1})$

vérifier $|z_m| \leq 0,1$ cela

Le triangle est un triangle isocèle en A_{m+1}

$$\frac{z_{m+1} - z_m}{z_{m+1} - 0}$$

Un argument représente la valeur principale de $(\overrightarrow{OA_{m+1}}; \overrightarrow{A_m A_{m+1}})$ qui vaut $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$

$$(\overrightarrow{OA_{m+1}}; \overrightarrow{A_m A_{m+1}}) = (\overrightarrow{A_{m+1}O}; \overrightarrow{A_{m+1}A_m})$$

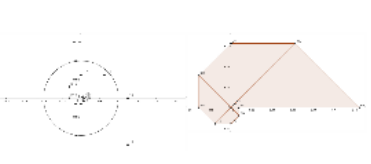
$$= (i) = 1 \text{ (nt à être)} \quad |z_{m+1} - z_m| = |z_{m+1}|$$

rectangle car $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$ en A

Le rapport est un imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{A_{m+1}A_m}$ et $\overrightarrow{OA_{m+1}}$ sont orthogonaux et le triangle $OA_m A_{m+1}$ est rectangle en A_{m+1}

Modéliser - Représenter

n	r(n)	w(n)	v(n)
0	1	1	1
1	1	1	1
2	0.5	1	1
3	-0.5	0.707	0.7
4	0	0.5	0.7
5	0.25	0.25	0.7
6	0.25	0.25	0.7
7	0.125	0.125	0.7
8	0.125	0.125	0.7
9	0.0625	0.0625	0.7
10	0.0625	0.0625	0.7
11	0.03125	0.03125	0.7
12	0.03125	0.03125	0.7
13	0.015625	0.015625	0.7
14	0.015625	0.015625	0.7
15	0.0078125	0.0078125	0.7
16	0.0078125	0.0078125	0.7
17	0.00390625	0.00390625	0.7
18	0.00390625	0.00390625	0.7
19	0.001953125	0.001953125	0.7
20	0.001953125	0.001953125	0.7



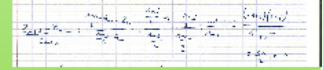
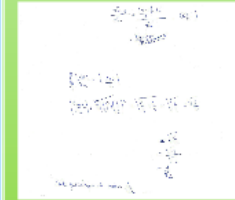
Observer - conjecturer

- les valeurs de n pour lesquelles z(n) est réel
- la nature de la suite r(n)
- la limite de la suite r(n)
- le rang à partir duquel r(n) < 0,1
- la nature de la suite w(n)
- la nature du triangle OB_nB_{n+1}

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Calculer



Quelles compétences

- CHERCHER
- MODELISER
- REPRESENTER
- CALCULER
- RAISONNER
- COMMUNIQUER

Raisonner - Communiquer

Le point de l'axe des ordonnées est un entier naturel. Il s'agit de montrer que z(n) est réel.

La simplicité de l'énoncé conduit à penser que z(n) est un entier naturel. On peut alors se demander si z(n) est un entier naturel. On peut alors se demander si z(n) est un entier naturel. On peut alors se demander si z(n) est un entier naturel.

2 énoncés pour un même exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On pose $z_n = 2$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{z_n}{2}$. On note B_n le point d'affixe z_n .

Exercice type bac

- Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points B_1, B_2, B_3 et B_4 sur une figure.
- Pour tout nombre entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.
Vérifier que la suite (u_n) est géométrique puis établir que pour tout entier naturel n ,
$$u_n = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}^n}$$
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
Expliquer pourquoi à partir d'un certain rang n_0 , tous les points B_n sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Déterminer n_0 .
- Établir que pour tout entier naturel n , $\frac{z_n + 1}{z_{n+1}} = 1$.
En déduire la nature du triangle $OB_n B_{n+1}$.

TD proposé en terminale S (GEOGEBRA)

- A l'aide du tableur Geogebra :
colonne A : faire apparaître les 20 premiers entiers naturels
colonne B : calculer les 20 premiers termes de la suite (z_n) .
Certains termes de la suite (z_n) sont des nombres réels. Identifier ceux-ci.
- On pose $u_n = |z_n|$.
a. Faire afficher les 20 premiers termes de la suite (u_n) dans la colonne C du tableur.
b. Établir une conjecture sur la limite de la suite (u_n) et la démontrer.
c. Vérifier géométriquement le résultat précédent à l'aide des points B_1, B_2, \dots, B_{20} .
- Établir une conjecture sur le rang n à partir duquel tous les points B_n sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,1. Démontrer votre conjecture.
- On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{z_n + 1}{z_{n+1}}$.
a. Afficher dans la colonne D du tableur les 20 premiers termes de la suite.
b. Établir une conjecture sur la nature de cette suite et la démontrer.
c. On détermine la nature du triangle $OB_n B_{n+1}$ pour tout entier n .

Les compétences au lycée

Observer - conjecturer

les valeurs de n pour lesquelles $z(n)$ est réel

la nature de la suite $r(n)$

la limite de la suite $r(n)$

le rang à partir duquel $r(n) < 0,1$

la nature de la suite $w(n)$

la nature du triangle OB_nB_{n+1}

Handwritten mathematical notes showing a sequence of terms: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \pi$. Brackets group the terms, with arrows pointing to the values 2, 4, 1, 0,5, 0,25. The terms are multiplied by $\frac{1}{2}$.

Quelles compétences