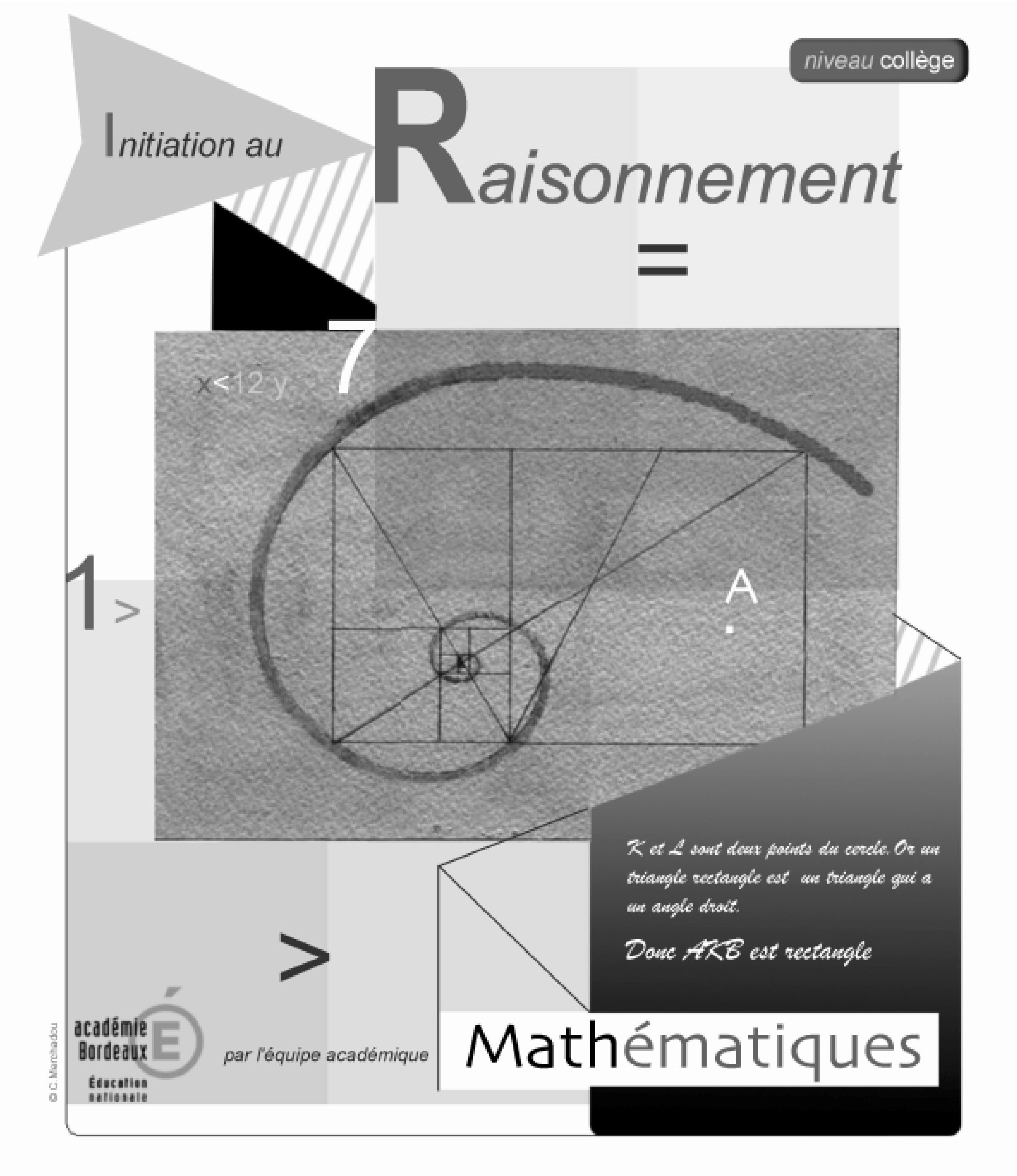


Équipe académique Mathématiques

sous la coordination de l'inspection pédagogique régionale de Mathématiques

Les recherches sur « l'initiation au raisonnement » sont très nombreuses et la documentation abondante. Il ne saurait être question, en quelques pages, de présenter une étude exhaustive sur ce sujet, ni d'envisager toutes les pistes actuellement explorées.

Nous avons choisi :
- d'une part, d'exposer un exemple de progression pour « l'initiation au raisonnement déductif »,
- d'autre part, de répertorier et illustrer les différents types de raisonnement qui se présentent au collège.

Concernant le premier point, les progressions se définissent la plupart du temps en termes de « contenus » (chapitres clairement identifiés, cohérence dans la présentation des notions). Notre intention est de présenter en complément un autre type de progression conçu en terme de « méthodes » et non plus seulement en terme de « contenus ». Nous nous sommes attachés à présenter cette stratégie pour « une initiation au raisonnement déductif ». Elle peut s'échelonner de la sixième à la quatrième. Cet exposé ne constitue en aucun cas un modèle destiné à être calqué intégralement, il vise simplement à alimenter une réflexion sur la méthode à utiliser pour aborder et conduire cette « initiation ».

L'analyse de la structure du raisonnement déductif nous a suggéré cette progression. Le franchissement des différentes étapes (nécessité de démontrer, prise en compte des informations, fonctionnement d'un théorème, rédaction) conditionne la mise en place de l'apprentissage. Toutefois, celui-ci ne saurait être linéaire et l'on peut s'attendre à des régressions momentanées ou à des progrès sensibles.
Certaines dimensions ont été volontairement écartées, sans toutefois céder à un schématisme excessif : l'intuition, l'affectivité ou la capacité de compréhension... ont été occultées mais il est évident qu'elles jouent un rôle important dans le processus d'apprentissage. Les intégrer par la suite à la trame que nous nous sommes fixée est possible, souhaitable et même nécessaire. Ainsi enrichie, la méthode proposée n'en aura que plus d'efficacité.
Par ailleurs, la démarche exposée ici a par essence un caractère analytique, tandis que l'activité de raisonnement mobilise simultanément plusieurs compétences. Il va de soi qu'il s'agit d'une facilité de présentation pour garantir un minimum de clarté.

La progression que nous avons choisie sera illustrée à chaque étape par des exercices : ceux-ci auront deux vocations, d'une part assurer le franchissement d'un nouveau seuil et d'autre part favoriser la remédiation pour les élèves en difficulté.

Sommaire

Le raisonnement au collège
Première partie

Pour une initiation progressive
au raisonnement déductif en géométrie au collège

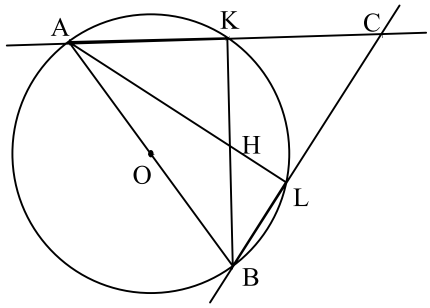
I - Introduction

Un texte d'exercice en classe de Quatrième :

Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Tracer un diamètre [AB]. Placer deux points K et L sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que K et L sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

1) Démontrer que les triangles AKB et ALB sont rectangles.
2) Les droites (AK) et (BL) se coupent en C. Les droites (AL) et (BK) se coupent en H.

   Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).



Voici les réponses données par trois élèves différents dans une classe de quatrième.
Le schéma n'a pas présenté de difficultés particulières.

Les réponses d'élèves sont retranscrites telles qu'elles apparaissent sur les copies.

Élève 1

1) On sait que [AB] sont le diamètre du cercle et que K et L sont sur le cercle. Dans un cercle circonscrit tout points se trouvant sur ce cercle est rectangle à un triangle, là c'est le cas « AKB » K est rectangle.
   Donc AKB est rectangle et ALB et rectangle.
2) On sait que : c'est le sommet du triangle ABC est H coupe le milieu du segment [AB].
   Donc (CH) ⊥ (AB).

Élève 2

1) On sait que :
   [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

Si un triangle coupe un autre triangle sur le milieu de son côté Alors il est rectangle.

   Donc : AKB et ALB sont des triangles rectangles.
2) On sait que :
   [AB] est le diamètre du cercle $\mathcal{C}$, (AK) et (BL) se coupent en C, (AL) et (BK) se coupent en H et AKB et ALB sont des triangles rectangles.

Si dans un triangle, les trois médianes se coupent en un même point, alors elles sont concourantes et leur orthocentre est C.

   Donc : (CH) ⊥ (AB).

Élève 3

1) On sait que AB est un diamètre, K et L sont placés dans un même demi-cercle et sur le cercle C.
Si un triangle a un côté qui est un diamètre et un point sur un cercle C alors les triangles sont rectangles.
Donc KAB est un triangle rectangle en K.
ALB est un triangle rectangle en L.
2) On sait que L est perpendiculaire à (BC)
K est perpendiculaire à (AC)
Et que les 2 points passent par un sommet.
Dans un triangle les 3 hauteurs se coupent en un seul point qui s'appelle l'orthocentre.
Donc : $(CH) \perp (AB)$.

Ces trois élèves font partie de la même classe. Ils ont manifestement utilisé un modèle de rédaction similaire. Il est alors légitime de s'interroger :

1) L'élève n'est-il pas perturbé par ce modèle de rédaction ?
   N'est-il pas préférable de le laisser s'exprimer dans son langage ?
2) A quel niveau de compréhension se situe chacun de ces élèves ?
3) Quels exercices de remédiation envisager pour chacun d'eux ?

L'exposé qui suit se propose de définir une stratégie et une progression cherchant à répondre à ces questions.

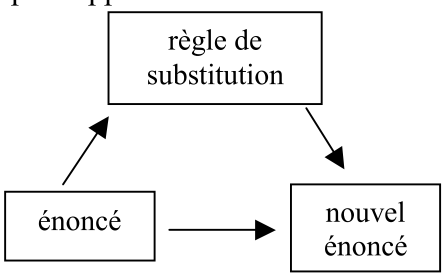
Deux attitudes semblent indispensables pour tenter d'atteindre cet objectif :
- ne pas se contenter de sanctionner l'élève qui a donné une réponse fausse, mais analyser cette réponse, dans son langage, afin de détecter les éléments positifs de son discours.
- étudier les erreurs de l'élève et lui proposer des activités de remédiation, la seule correction de l'exercice étant insuffisante.

II - Structure du raisonnement

Chaque pas de démonstration est constitué de ce que l'on peut appeler un « îlot déductif ».

Chaque îlot déductif est formé par :

1) des énoncés donnés ou antérieurement démontrés,
2) une règle de substitution (théorème, définition...),
3) un nouvel énoncé (ou conclusion).



Remarques

1) Le nombre de conditions à prendre en compte pour appliquer une règle de substitution est variable.
2) L'unité de base de toute organisation déductive comporte trois énoncés, chacun ayant un statut différent, même si, lors de la rédaction, on peut omettre la règle de substitution et avoir l'impression d'avoir affaire à une structure binaire.

III - Une progression favorisant la mise en place du raisonnement

A l'école primaire, les enfants ont observé des figures, mesuré, fait des découpages, comparé des aires, expérimenté, reproduit, décrit, représenté, construit … « visant ainsi à favoriser la construction d'images mentales et la mise en évidence de quelques propriétés (côtés de même longueur, angles droits, parallélisme, axes de symétrie) », ils ont mis en place un « vocabulaire minimum, précis mais limité (face, arête, sommet, côté, segment, milieu, ligne droite, angle, perpendiculaire, parallèle) » ; ils ont appris à utiliser les instruments du dessin (règle, équerre, compas), à construire quelques figures planes (carré, rectangle, losange, cercle) et à réaliser des patrons de solides (cube, pavé).

« En sixième, les élèves ne travaillent pas sur des objets nouveaux », les travaux conduits à ce niveau doivent prendre en compte les acquis antérieurs, ils doivent viser à les stabiliser, les structurer, et peu à peu les hiérarchiser, avec, notamment, un objectif de préparation à la déduction. « La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction ».

→ (Voir BO n°44 du 05/12/1996 : Mathématiques « articulation école-collège » p 2947)

Au collège, l'élève devra donc évoluer d'une géométrie d'observation vers une géométrie de déduction.

On indiquera les différentes étapes à franchir afin d'atteindre la mise en place correcte et l'expression d'un raisonnement déductif.

❑ Première étape
Faire admettre aux élèves la nécessité de la démonstration

Certains exercices aident à comprendre la nécessité de la démonstration.

→ *Voir « Fiche annexe 1 »*

❑ Deuxième étape
Travailler sur les informations

Entre relever les informations et traiter le informations, il existe différents niveaux de compétence.
Pour faire fonctionner un théorème, il est nécessaire d'avoir relevé, trié et utilisé un certain nombre d'informations.
Face à un texte donné ou à une figure donnée, on peut distinguer :

- d'une part les élèves sachant ordonner les propriétés qui président à la construction des figures,
- de l'autre, ceux qui sont seulement capables de repérer et de désigner les informations sans faire de liens entre elles.

De façon plus précise, on peut identifier plusieurs stades :

Stade 1

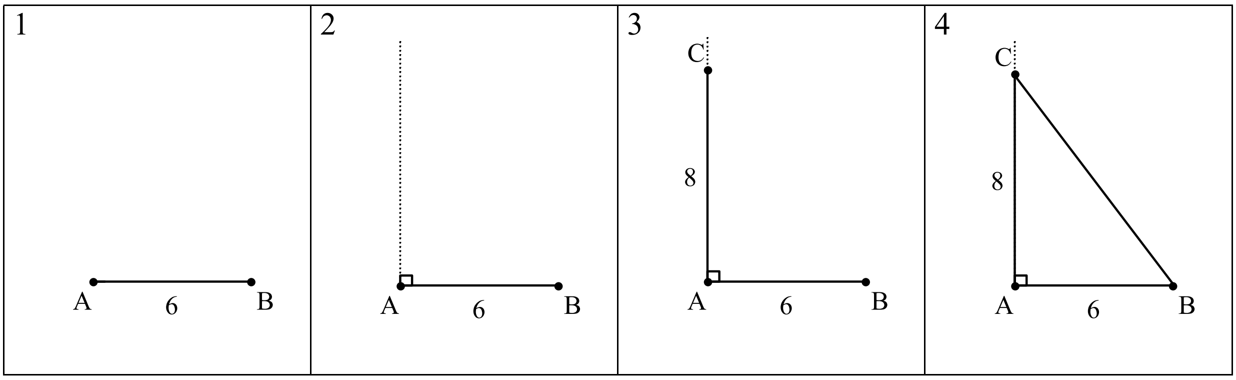
L'élève identifie une information isolée. Les figures sont porteuses de propriétés mais celles-ci sont considérées de façon indépendante. L'élève sait par exemple repérer deux droites perpendiculaires ou deux segments de même longueur sur une figure codée. Inversement, il sait coder une figure réalisée à partir d'une consigne écrite. En arrivant en Sixième, l'élève prendra l'habitude de relier spontanément la phrase « les deux segments [AB] et [CD] ont la même longueur », l'écriture mathématique « AB = CD » et le codage de la figure.

Stade 2

Les propriétés commencent à s'ordonner. L'élève sait, par exemple, résoudre les problèmes suivants :

- **Exemple 1**

Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 8 cm.



- **Exemple 2**

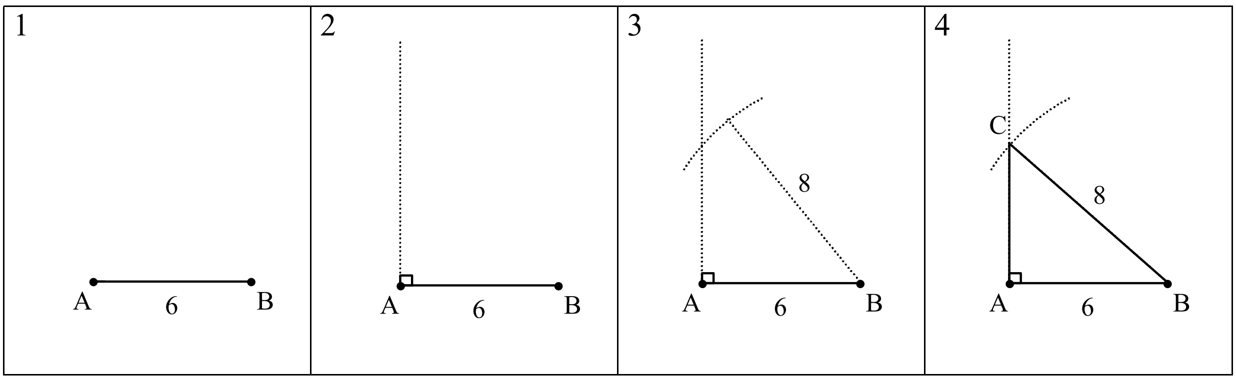
Tracer, en utilisant la règle graduée et l'équerre, la médiatrice d'un segment de longueur donnée 6 cm.

Stade 3

L'élève sait hiérarchiser les informations et tenir compte simultanément de plusieurs d'entre elles. Il sait résoudre les problèmes suivants :

- **Exemple 1**

Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 cm et BC = 8 cm.



- **Exemple 2**

Construire, en utilisant la règle et le compas, la médiatrice d'un segment donné.

Certains types d'exercices peuvent être envisagés :

- figures téléphonées,
- transformation d'un texte donnant une description générale en un texte donnant les étapes d'une construction.
  Exemple : « *Tracer un triangle ABC rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A* » peut se transformer en : « *Tracer un triangle ABC rectangle en A. Tracer la droite d passant par A et perpendiculaire à (BC). d et (BC) se coupent en H* ».
  On peut aussi envisager l'exercice inverse.

De façon plus générale, tout exercice sollicitant le passage d'un registre « texte » à un registre « figure » ou inversement permet de travailler sur les informations.

→ *Voir « Fiche annexe 2 »*

❑ Troisième étape
Rechercher dans un texte ou sur une figure les informations nécessaires à prendre en compte pour utiliser une règle de substitution (théorème, définition...)

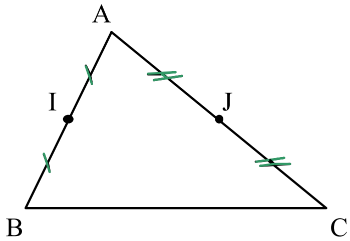
Beaucoup d'élèves ayant à leur disposition le bon théorème ne savent pas l'appliquer correctement… D'où les difficultés de ceux qui souvent apprennent les leçons mais sont incapables de les réinvestir.
Il est possible d'agir sur deux plans :

Au niveau du cours

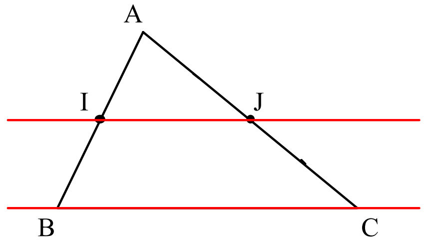
Bien discerner le statut des conditions dans l'énoncé même du théorème.

Exemple
Pour le théorème des milieux, on pourra procéder :

- Soit en décomposant en deux figures :

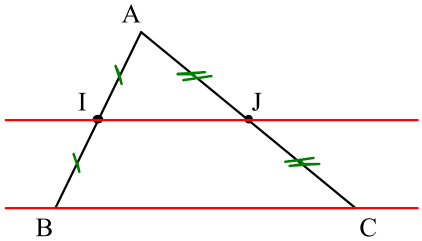


avant



après

- Soit en différenciant sur un même schéma par des couleurs les hypothèses et la conclusion.



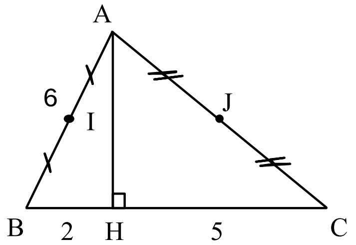
Vert : hypothèses
Rouge : conclusion

Pour appliquer ce théorème, il faut donc reconnaître un schéma de type 1 sans oublier de prendre toutes les conditions mises en jeu et seulement celles-là.

Au niveau des exercices

Les figures ou les textes portent- ils les informations permettant d'appliquer une règle de substitution ?

Exemple



« Quelles informations donne cette figure ? Quels théorèmes pourrait-on utiliser ? »

Certaines erreurs indiquent que cette étape n'est pas franchie :

- la conclusion est confondue avec l'hypothèse,
- une seule condition est proposée alors que la règle de substitution en demande plusieurs.

→ *Voir « Fiche annexe 3 »*

❑ Quatrième étape
Comprendre qu'un îlot déductif comporte trois éléments (les données, la règle, la conclusion)

Les élèves qui n'ont pas compris cette étape produisent des textes de rédaction qui reproduisent le schéma demandé, mais la structure profonde de la démonstration n'est pas comprise.
Ils invoquent des théorèmes qui ne fonctionnent pas, les données du texte n'ayant aucun lien avec les hypothèses du théorème.

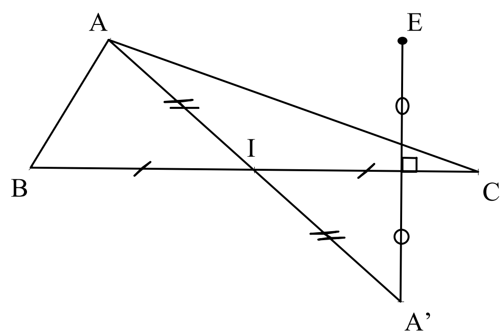
Par exemple, pour l'exercice donné en introduction, l'**Élève 4** propose :

K et L sont deux points du cercle. Or un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit. Donc AKB est un triangle rectangle.

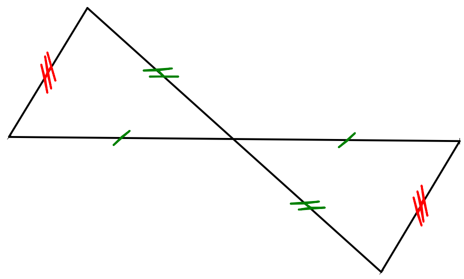
Pour franchir cette étape, il faut que l'élève soit capable d'isoler, dans un environnement éventuellement complexe, une « configuration-clé » afin de faire fonctionner le théorème.

Exemples

1) ABC est un triangle, I le milieu de [BC], A' le symétrique de A par rapport à I. Soit E le symétrique de A' par rapport à (BC). Démontrer que AB = CA'.

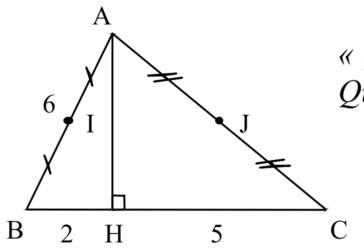


- On reconnaît dans un environnement complexe le schéma illustrant une règle de substitution :



- On applique la règle de substitution.
- On donne la conclusion.

2) Retour sur un exemple précédent.



« Quelles informations donne cette figure ?
Quels théorèmes pourrait-on utiliser ? »

On rajoute la troisième question :

« Que peut-on en conclure ? » ou *« quelles questions pourrait-on poser ? »*

⟶ *Voir « Fiche annexe 4 »*

❑ Cinquième étape
Comprendre que le statut des énoncés est indépendant de leur contenu

L'objectif de cette étape est de bien montrer qu'au cours d'une démonstration, la conclusion d'un îlot déductif devient une donnée dans un îlot postérieur.
Lorsque cette étape est franchie, l'élève peut alors envisager la construction de raisonnements à plusieurs pas.

❑ Sixième étape
Faire fonctionner plusieurs îlots déductifs

Pour des élèves ayant des difficultés d'écriture et de rédaction, une façon de travailler ce seuil en utilisant des déductogrammes.

❑ Septième étape
Rédiger

Étape ultime de cette progression, la rédaction ne saurait prendre le pas sur la démarche mathématique, en particulier lors de la notation de travaux.
Les rédactions produites par les élèves reflètent souvent les difficultés qu'ils éprouvent et peuvent nous renseigner sur leur niveau de compréhension.

En reprenant les productions d'élèves choisies dans l'introduction :

Élève 1

Cet élève semble avoir compris le mécanisme d'une démonstration à un pas, même si ses formulations sont extrêmement maladroites. En revanche, il n'aborde en aucune façon la démonstration à deux pas et fournit des arguments qui n'ont plus aucune cohérence avec la recherche conduite.
Un gros travail reste à effectuer avec lui sur le statut des énoncés et sur leurs formulations. Il pourra ainsi clarifier son propre discours et aborder la démonstration à plusieurs pas.

Élève 2

Il semble également avoir compris le mécanisme de la démonstration à un pas, même si les énoncés des théorèmes utilisés sont erronés. La rédaction proposée à la deuxième question n'est pas complètement convaincante pour décider si l'élève a compris un enchaînement à deux pas.
Un travail important est à faire sur la formulation claire et la compréhension des différents théorèmes. Peut-être est-il un peu plus en avance que l'élève 1 quant à sa capacité à se rapprocher d'une solution correcte lorsque le nombre de pas est supérieur à un ?

Élève 3

Cet élève semble très proche d'une solution correcte. Un travail de mise en forme, surtout à la deuxième question, lui permettra de fournir une rédaction acceptable d'une solution au problème proposé. Les formulations du type « L est perpendiculaire à (BC) » ne nous semblent pas de nature à perturber l'enchaînement de la démonstration, par contre il est indispensable de les corriger car elles cachent des inexactitudes dans l'appropriation de certaines notions qui peuvent avoir des conséquences dommageables sur le raisonnement lui-même.
Des séances de travail sur différentes sortes de rédactions pourraient être proposées à cet élève afin qu'il améliore sa production.

Valoriser excessivement la rédaction induit de la part des enfants des comportements vis à vis du raisonnement qui ressemblent plus à une imitation qu'à une véritable démarche personnelle de recherche.
La rédaction spontanée des élèves nous renseigne sur leurs démarches, sur leurs recherches, sur leurs méthodes. La standardiser trop tôt, en imposant un modèle, nous paraît susceptible d'instaurer un blocage prématuré préjudiciable à l'initiative et à l'appropriation des connaissances.

Différents types d'exercices peuvent faire comprendre aux élèves la nécessité de prouver. Par exemple :

- *des figures impossibles à réaliser,*
- *des figures où « l'œil » induit des conjectures fausses,*
- *tous les problèmes de construction,*
- *des problèmes ouverts qui provoquent un débat dans la classe,*
- *…*

Exercice 1

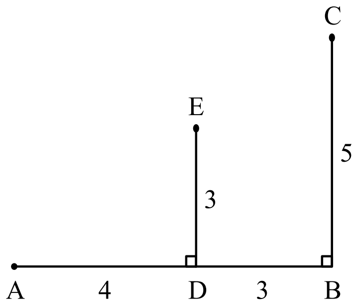
Construire un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 45°$ et $\widehat{B} = 44°$.

1) Le triangle vous paraît-il isocèle ?
2) Expliquez votre réponse.

Exercice 2

L'unité est le centimètre.

1) Reproduire la figure ci-contre en vraie grandeur.
2) Que peut-on dire des points A, E, C ?

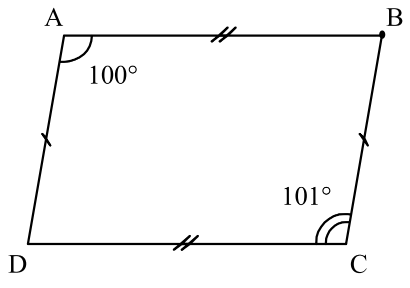


Exercice 3

[AB] est un segment de 14 cm de longueur.
Soit O le milieu de [AB],
M le point de [AB] tel que AM = 10,4 cm,
C un point tel que MBC soit équilatéral.
Que peut-on dire du triangle OMC ?

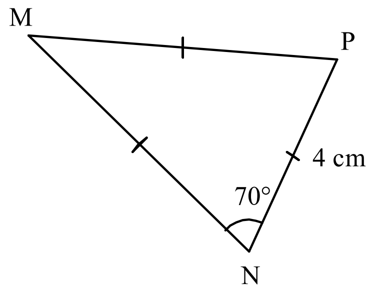
Exercice 4

Peut-on construire un quadrilatère ABCD tel que :



Exercice 5

Voici la figure à main levée d'un triangle.
Peut-on construire le triangle MNP en vraie grandeur ?



Exercice 6

Est-il possible de construire la figure suivante ?

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 3 cm et $\widehat{C} = 60°$.
La médiatrice du segment [BC] et la hauteur issue de A se coupent en D.

Exercice 7

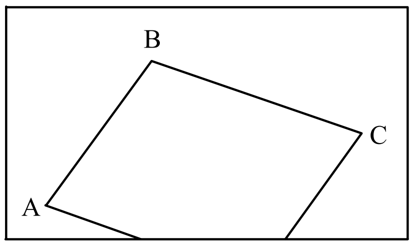
Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{C} = 44°$ et AB = 4 cm.
D est le symétrique de A par rapport au milieu de [BC].
Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

Exercice 8

Construire le centre d'un cercle dont on connaît un arc.

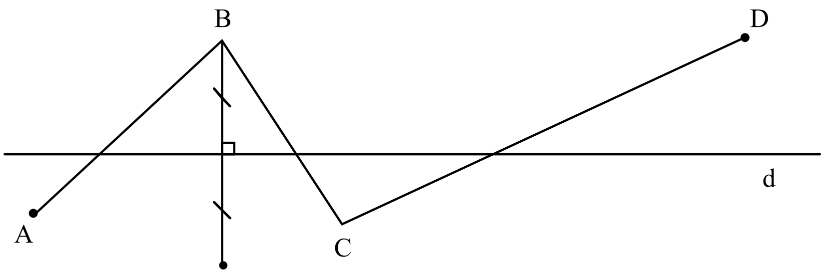
Exercice 9

ABCD est un parallélogramme.
Construire la droite (BD) sans sortir du cadre.



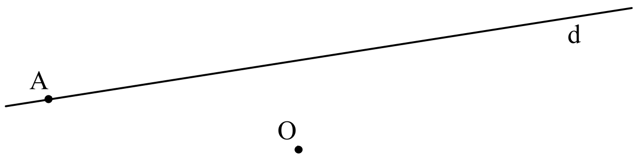
Exercice 10

Construire, à la règle uniquement, la symétrique de la ligne brisée ABCD par rapport à d.



Exercice 11

Construire à la règle et au compas le rectangle ABCD connaissant le sommet A, la droite d joignant ce sommet à un sommet consécutif et le centre O du rectangle.



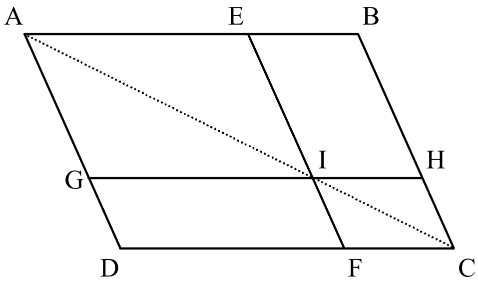
Exercice 12

Dans l'expression $n^2 - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

Exercice 13

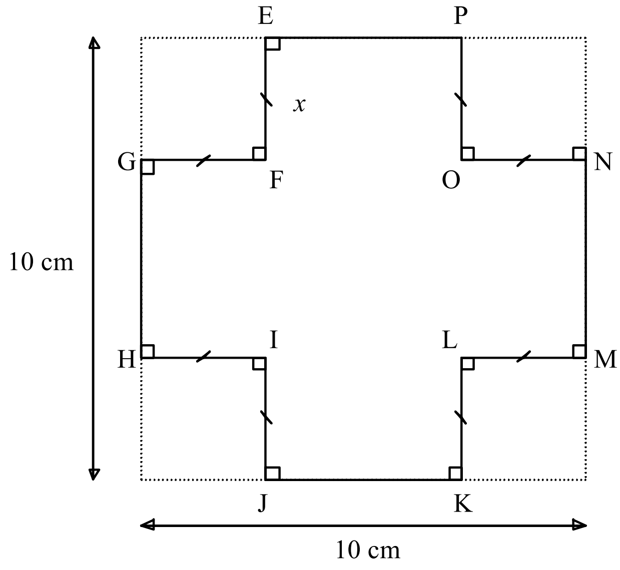
Dans la figure ci-contre :
(AD) // (EF) // (BC)
(AB) // (GH) // (DC)
(AC), (EF) et (GH) sont concourantes en I.

Des parallélogrammes EBHI et GIFD, quel est celui qui a la plus grande aire ?



Exercice 14

Quelle valeur choisir pour x de façon à ce que le périmètre du dodécagone EFGHIJKLMNOP soit le plus grand possible ?



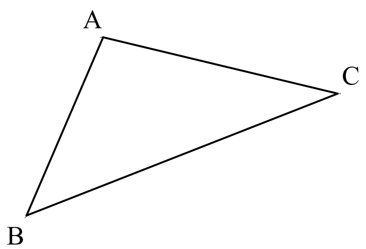
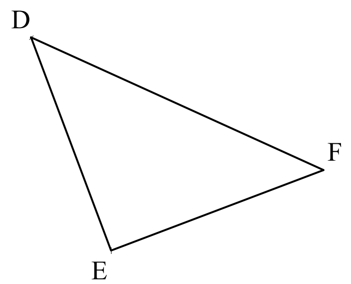
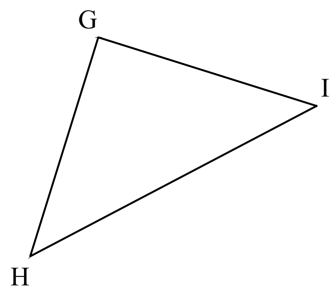
Annexe 2 Deuxième étape

Travailler sur l'information est une des étapes essentielles qui permettent de passer de la géométrie d'observation à la géométrie de déduction.
Plusieurs types d'exercices favorisent ce passage :

- *dresser la liste des données contenues dans un texte,*
- *lire une figure codée,*
- *passer d'un texte à une figure et réciproquement ou d'une figure à une figure (figures téléphonées par exemple),*
- *écrire un programme de construction,*
- *…*

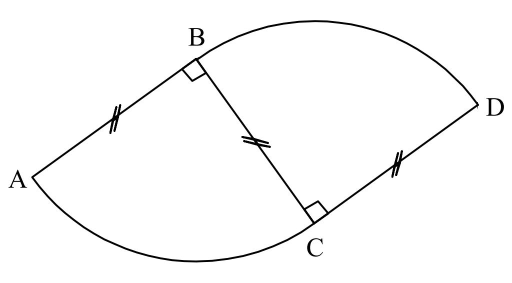
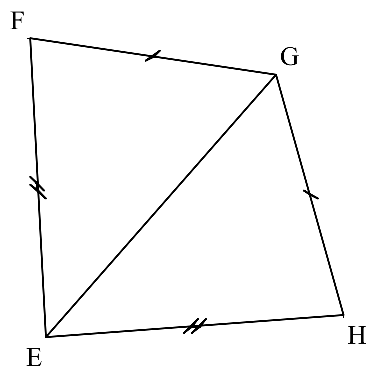
Exercice 1

Pour chacun des trois triangles, porter sur les dessin les informations qui sont écrites.

		
$\widehat{A} = 100°$ $\widehat{B} = 45°$	DEF est rectangle en E. Les côtés [DE] et [EF] ont la même longueur.	$\widehat{G} = 90°$ $\widehat{H} = \widehat{I}$

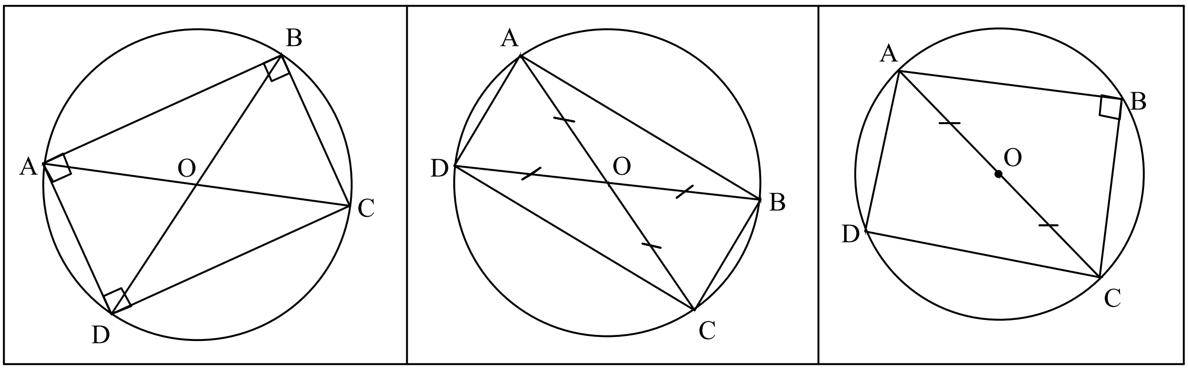
Exercice 2

Reproduire les figures ci dessous :

	
BC = 4 cm	EG = 7 cm EH = 6 cm FG = 5 cm

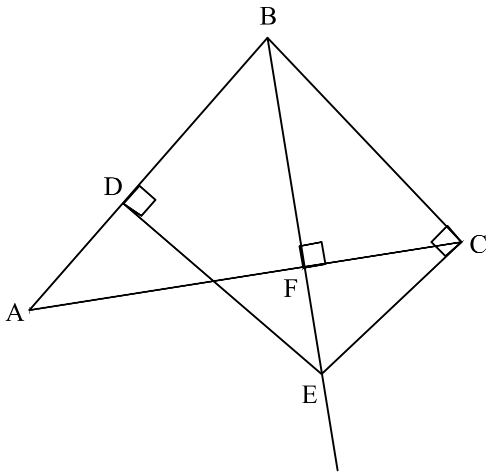
Exercice 3

A, B, C et D sont quatre points du cercle.
Pour chaque dessin, dresser la liste des données.



Exercice 4

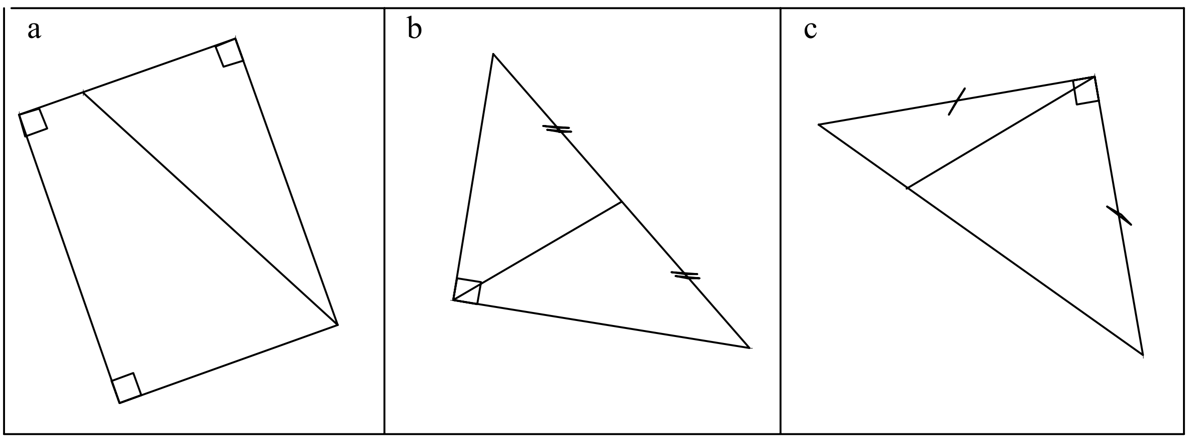
Retrouver le texte qui a permis de construire la figure ci-contre.



Exercice 5

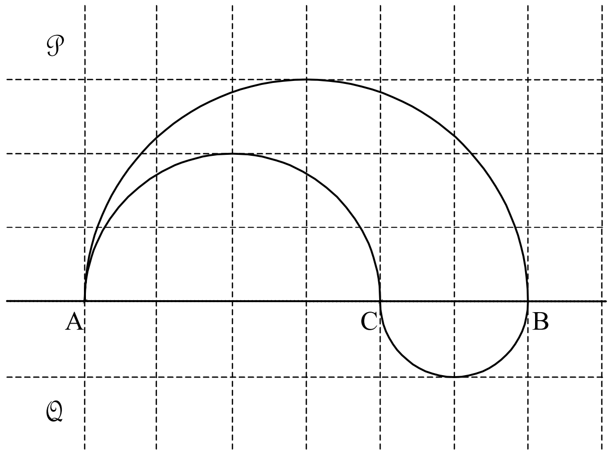
Associer le texte à la figure qui convient et placer les points.

1) Soit ABC un triangle rectangle en B et [BI] le segment qui joint B au milieu I du segment [AC].
2) Soit DEF un triangle rectangle et isocèle en F. Tracer un segment [FO] dont une extrémité appartient à l'hypoténuse du triangle DEF.
3) Soit SRUV un rectangle, placer un point P sur le segment [UV] et tracer le segment [RP].



Exercice 6

Le schéma ci-dessous illustre la construction au compas d'une figure.

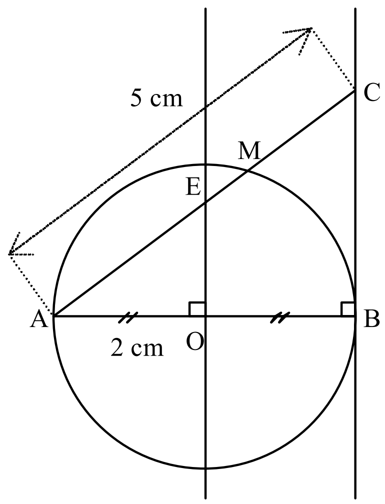


Les points A et B sont donnés.
La droite (AB) partage le plan en deux demi-plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Écrire le programme de construction de la figure.

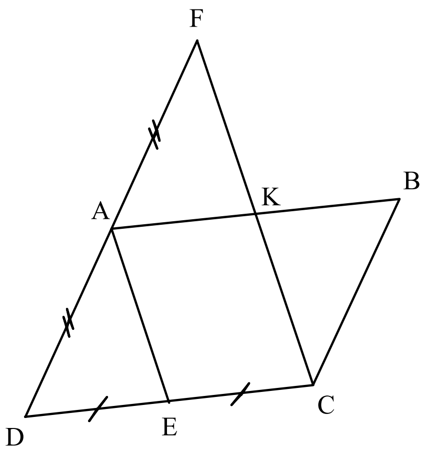
Exercice 1

En utilisant les codages de la figure, quels théorèmes peut-on utiliser ?



Exercice 2

En utilisant les codages de la figure et les indications ci-jointes, quels théorèmes peut-on utiliser ?



(AB) // (DC)
et
(AD) // (BC)

Exercice 3

Tracer un triangle ABC, rectangle en A, tel que : AC = 2,5 cm et AB = 4 cm.
Placer le point E, milieu de [BC].
Tracer la droite Δ passant par B et parallèle à (AE).
Tracer la droite Δ' passant par E et parallèle à (AB).
Les droites Δ et Δ' se coupent en F.
Placer le point G symétrique de B par rapport à F.

Exercice 4

Voici une liste de théorèmes :

1. **Si** deux droites sont perpendiculaires à une même troisième
   alors elles sont parallèles.

2. **Si** deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une d'elles
   alors elle est perpendiculaire à l'autre.

3. Théorème de Pythagore.

4. **Si** un point appartient à la médiatrice d'un segment
   alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

5. **Si** un point est équidistant des extrémités d'un segment
   alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

6. **Si** une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle
   alors elle est parallèle au troisième côté.

7. **Si** un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle
   alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

8. **Si** une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et si elle est parallèle à un deuxième côté
   alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

9. **Si** un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles
   alors c'est un parallélogramme.

10. **Si** un triangle est inscrit dans un demi-cercle et si un de ses côtés est un diamètre
    alors ce triangle est rectangle.

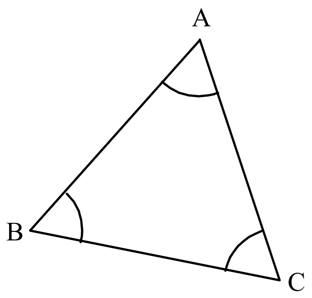
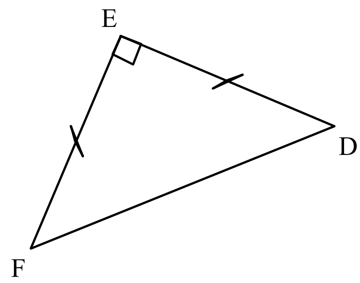
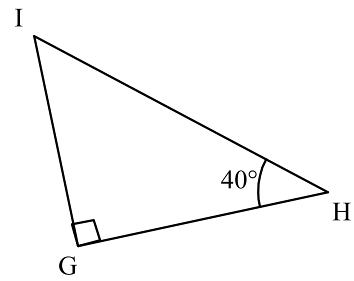
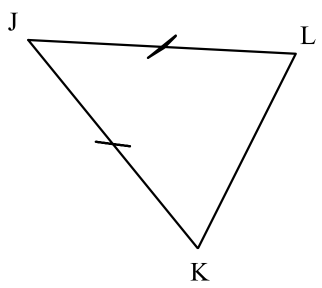
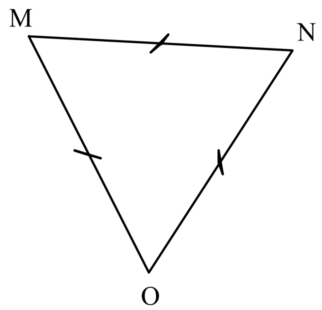
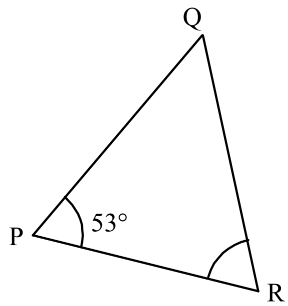
11. **Si** un triangle est rectangle
    alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse.

…………

Ces théorèmes peuvent-ils être utilisés dans les exercices 1, 2 et 3 ?

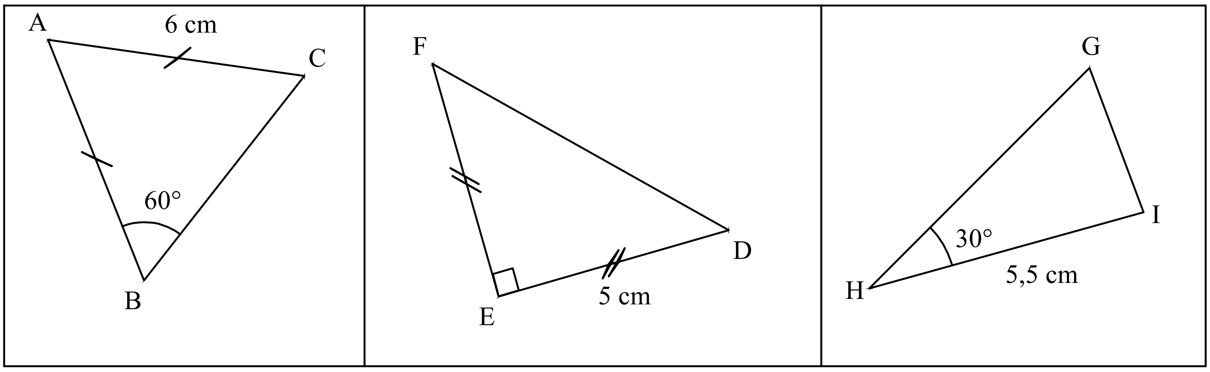
Exercice 1

On a dessiné et codé différents triangles.
Quelle est la nature de chaque triangle ?

		
…………………………	…………………………	…………………………
		
…………………………	…………………………	…………………………

Exercice 2

Voici trois triangles tracés à main levée.



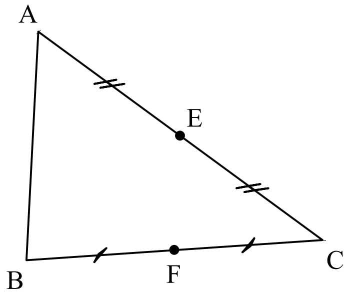
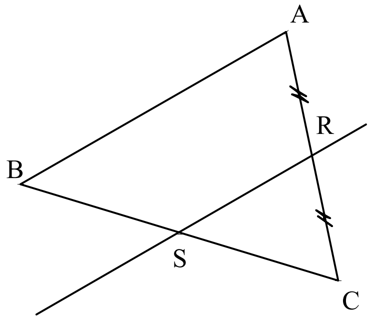
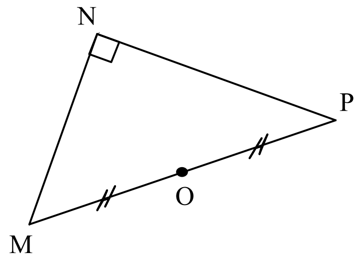
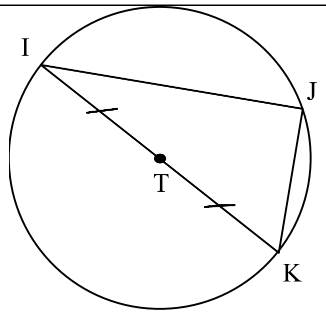
Compléter les tableaux :

	Longueur (en cm)	Je ne peux pas répondre
AB		
BC		
AC		
DE		
EF		
DF		
GH		
HI		
GI		

	Mesure (en degrés)	Je ne peux pas répondre
$\widehat{BAC}$		
$\widehat{ABC}$		
$\widehat{ACB}$		
$\widehat{EDF}$		
$\widehat{DEF}$		
$\widehat{EFD}$		
$\widehat{HGI}$		
$\widehat{GHI}$		
$\widehat{GIH}$		

Exercice 3

Reconnaître les configurations de base et associer les théorèmes.

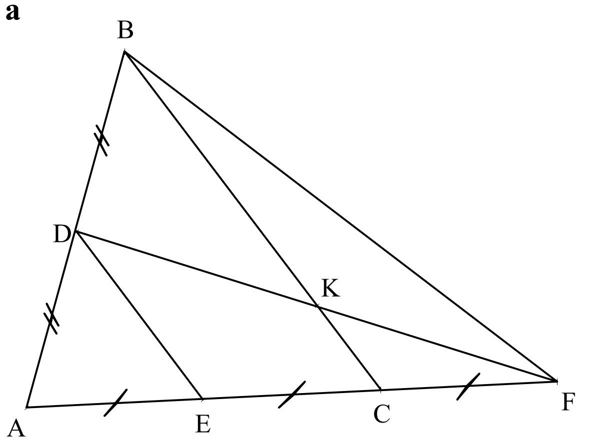
Figure codée	données	théorème	conclusion
			
 (SR) // (BA)			
			
			

Exercice 4

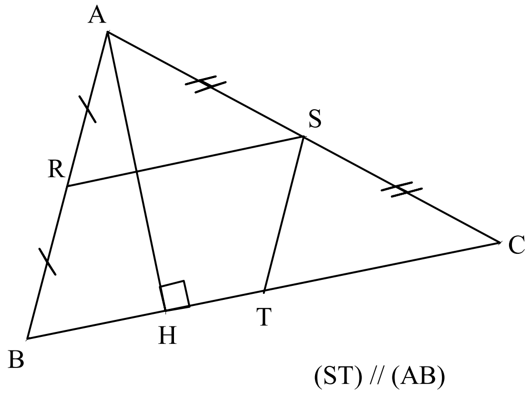
Pour chaque figure :

1) Écrire les données.
2) Repasser en couleur, sur les figures, les configurations de base.
3) Quelles conclusions peut-on en tirer ?

a



b



Le raisonnement au collège
Deuxième partie

Les différents types de raisonnement au collège

Tout au long du collège, la démonstration occupe une place importante puisque, dès la classe de sixième, la mise en place de courtes séances déductives permet d'initier les élèves au raisonnement. En géométrie, les chapitres « droites parallèles et perpendiculaires, cercle, symétrie axiale » permettent à l'élève de passer de la géométrie d'observation, enseignée à l'école, à une géométrie de déduction. Des travaux « géométrico-déductifs » peuvent aussi constituer un terrain privilégié pour aborder le raisonnement à l'aide d'îlots déductifs bien circonscrits, notamment à propos de la comparaison de longueurs et d'aires.

Au cycle central, on continue ce travail. Les activités géométriques habituent l'élève à expérimenter, à conjecturer puis à démontrer. Il faut cependant veiller à ce que l'élève ne confonde pas conjecture et théorème. Le recours à plusieurs pas de démonstration amène à comprendre le changement de statut d'une assertion au fil d'une démonstration : un résultat intermédiaire est une conclusion dans un pas et une donnée dans un pas ultérieur. L'examen de la compatibilité entre l'ordre et la multiplication oblige l'élève à procéder par disjonction de cas. Des propriétés dont la réciproque est fausse, comme dans le cas des quadrilatères particuliers, fournissent des occasions d'utiliser le contre-exemple.

En classe de troisième, l'apprentissage des théorèmes et des différents types de raisonnement se poursuit. Des résultats d'arithmétique comme l'irrationalité de racine carrée de deux ou le théorème sur les fractions irréductibles, sont autant d'occasions de familiariser les élèves avec le raisonnement par l'absurde.

A travers de nombreux exercices et ce, dès la sixième, l'élève a donc l'occasion d'élaborer différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction de cas, infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde.

Ce n'est qu'au lycée, en classe de seconde, qu'il utilisera l'équivalence logique. Il faudra attendre l'année de terminale pour mettre en place le raisonnement par récurrence.

Les différents types de raisonnement à travers le cours (démonstrations de propriétés et exercices d'application)

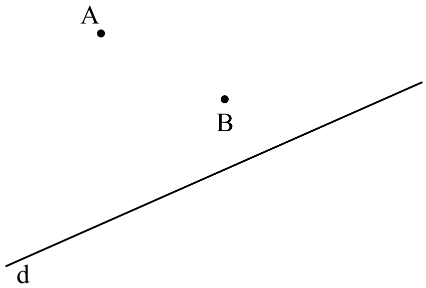
	Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
Raisonnement déductif	Utilisation des propriétés des droites parallèles et perpendiculaires. Utilisation des propriétés des symétries axiales. Définition du cercle.	Propriétés caractéristiques du parallélogramme et des quadrilatères particuliers. Caractérisation angulaire du parallélisme. Somme des angles d'un triangle. Concours des trois médiatrices d'un triangle. Différence de deux nombres, opposé d'une somme, d'une différence. Somme et produit des nombres en écriture fractionnaire.	Triangle et droite des milieux. Triangle et parallèles. Droites remarquables du triangle. Triangle rectangle et cercle. Le théorème de Pythagore et sa réciproque. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. Effet de l'addition sur l'ordre. Double distributivité.	Composée de deux translations, composée de deux symétries centrales. Représentation graphique d'une fonction linéaire. Réciproque du théorème de Thalès. Propriétés des racines carrées. Propriétés des diviseurs d'un nombre entier. Relations trigonométriques. Identités remarquables.
Raisonnement par disjonction de cas	Comparaison des décimaux	Comparaison des nombres relatifs en écriture décimale. Distance de deux points sur un axe et soustraction des nombres relatifs. Somme et produit des relatifs.	Effet de la multiplication sur l'ordre.	Théorème de Thalès. Angle inscrit, angle au centre. L'équation $x^2 = a$. Intersection de la sphère et du plan
Mise en évidence d'un contre-exemple	Exercices sur la division euclidienne	Travail sur les propriétés caractéristiques des figures. Prouver que deux suites de nombres ne sont pas proportionnelles.	Travail sur des égalités fausses avec les puissances	Travail sur des égalités fausses avec les racines carrées. Les réciproques fausses des propriétés des diviseurs d'un nombre entier.
Approche du raisonnement par l'absurde		Construction de triangles impossible. Caractérisation angulaire du non parallélisme.	Théorème de Pythagore.	Théorème de Thalès. $\sqrt{2}$ est irrationnel. Si on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, on obtient une fraction irréductible égale.

Sixième

I. 1) Construire le point S de la droite d tel que le triangle ABS soit isocèle en S.

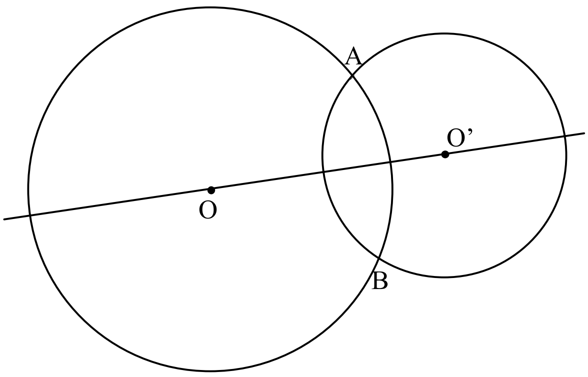
2) Construire le(s) point(s) R de la droite d tel(s) que le triangle ABR soit isocèle en B.

Médiatrice d'un segment et cercle



II. Deux cercles de centres O et O' se coupent en deux points A et B. Montrer que les droites (OO') et (AB) sont perpendiculaires.

Médiatrice d'un segment et cercle

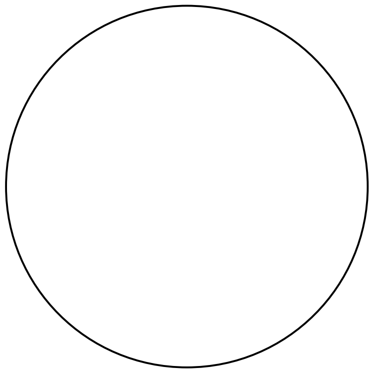


III. R, S et T sont trois points non alignés. Construire le point U tel que les triangles RSU et STU soient isocèles en U.

Médiatrice d'un segment

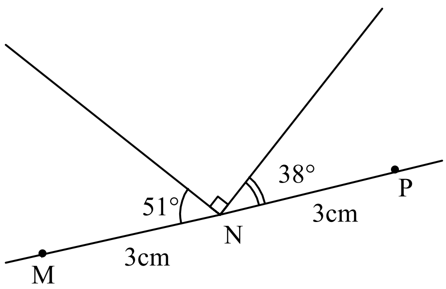
IV. Construire en utilisant uniquement la règle et le compas le centre de ce cercle.

Médiatrice d’un segment et cercle



V. 1) Reproduire en vraie grandeur la figure ci-dessous.

Angles



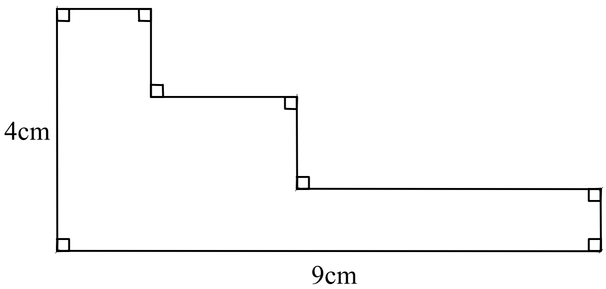
2) Les points M, N et P sont-ils alignés ?

VI. Soit EFG un triangle isocèle en E. I est le milieu de [FG].
Comparer les périmètres des triangles EIF et EIG.

Périmètre

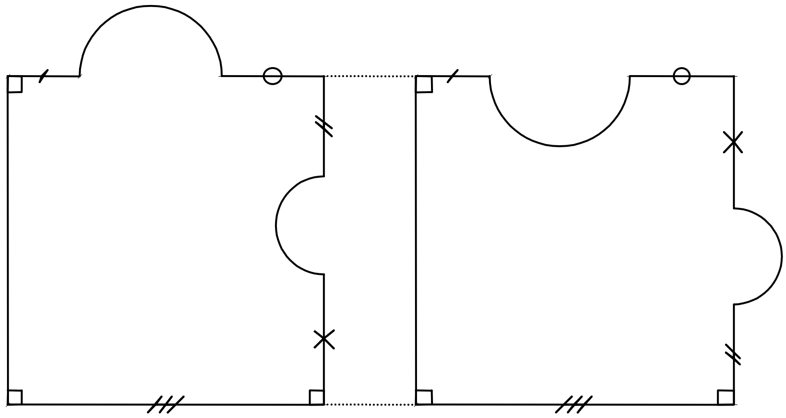
VII. Quel est le périmètre de cette figure ?

Périmètre



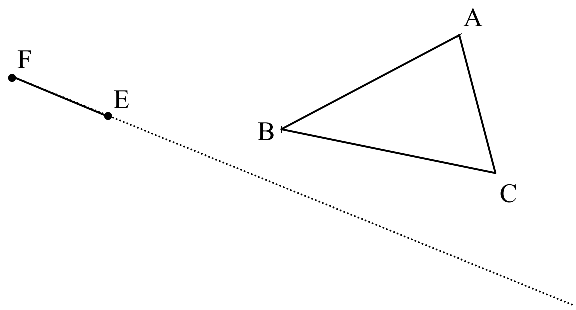
VIII. Comparer les périmètres des deux figures, les arcs de cercle étant tous des demi-cercles.

Périmètre et aire



IX. En utilisant uniquement la règle et le compas, construire un triangle EFG isocèle en G et de même périmètre que le triangle ABC.

Périmètre et médiatrice.



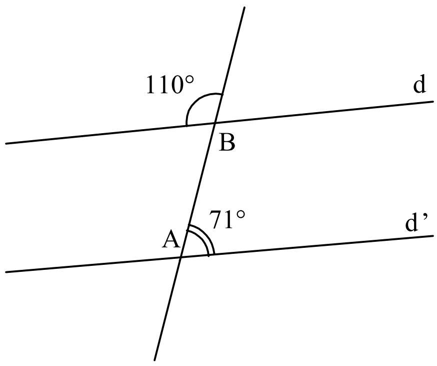
Cinquième

I. Peut-on construire un triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 6 cm et 11 cm ?

Inégalité triangulaire

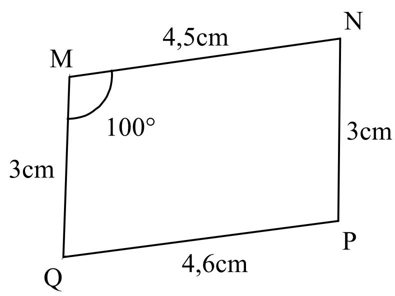
II. Les droites d et d' sont-elles parallèles ?

Angles et parallèles



III. 1) Construire en vraie grandeur le quadrilatère MNPQ.

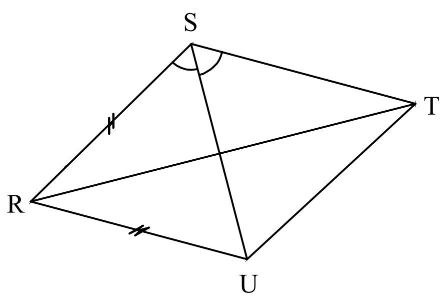
Quadrilatères particuliers



2) Paul affirme que MNPQ est un parallélogramme. Que faut-il en penser ?

IV. 1) Construire en vraie grandeur le quadrilatère RSTU

Quadrilatères particuliers

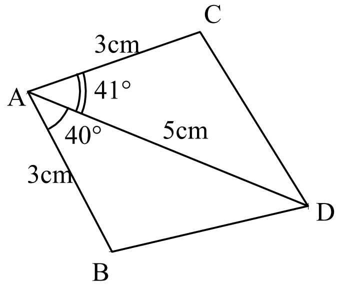


avec $\widehat{RST} = 121°$; $\widehat{SRT} = 30°$ et RS = 4 cm.

2) RSTU est-il un losange ?

V. 1) Construire en vraie grandeur le quadrilatère ABDC.

Symétrie axiale



2) Les segments [BD] et [CD] ont-ils la même longueur ?

VI. AEIO est un quadrilatère tel que
$\widehat{OAE} = \widehat{OIE} = 70°$ et $\widehat{AEI} = 109°$.
Les diagonales de AEIO se coupent-elles en leur milieu ?

Symétrie centrale

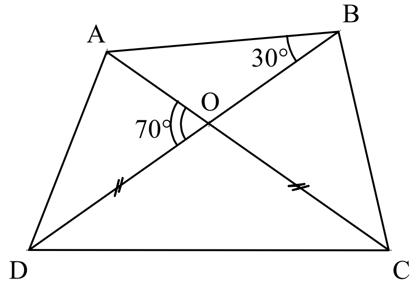
VII. Dans le tableau ci-dessous, la distance d'arrêt est-elle proportionnelle à la vitesse ?

Proportionnalité

Distance d'arrêt (en m)	14	28	79
Vitesse (en km/h)	30	60	90

VIII Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

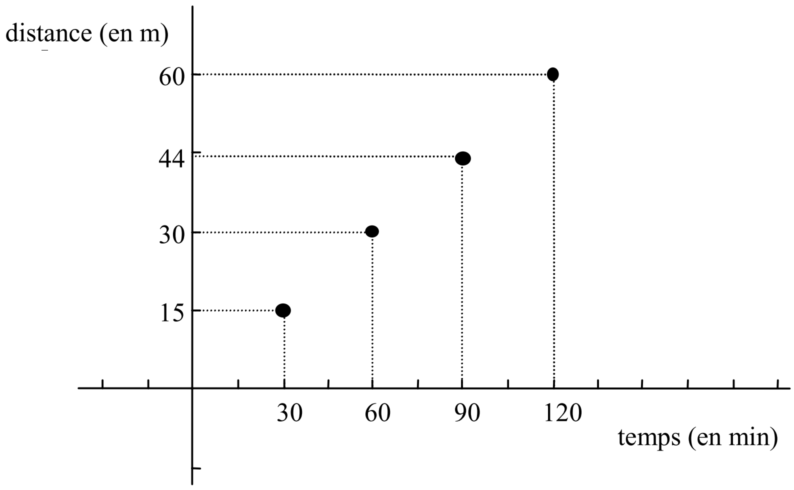
Angles et parallèles



On précise que les points A, O et C sont alignés et que les points B, O et D sont alignés.

IX. Le mouvement représenté ci-dessous est-il un mouvement uniforme ?

Mouvement uniforme

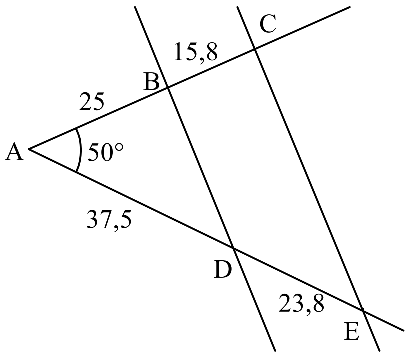


Quatrième

X. Soit ABC un triangle tel que AB = 4,9 cm ; AC = 4 cm et BC = 3,1 cm.
1) Construire le triangle ABC.
2) ABC est-il rectangle ?

Théorème de Pythagore

XI. L'unité de longueur est le mm.
1) Construire en vraie grandeur la figure.



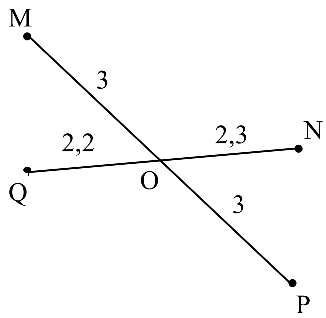
2) Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?

Triangles et parallèles

XII. Soit MRP un triangle tel que MR = 6 cm ; MP = 4,5 cm et PR = 3,2 cm.
N est le milieu de [MP] et Q le point de [MR] tel que QR = 3,2 cm.
Les droites (NQ) et (RP) sont-elles parallèles ?

Droite des milieux

XIII M est-il l'image de N par la translation qui transforme P en Q ?



Translation

XIV AEIO est un quadrilatère tel que $\widehat{AEI} = 45°$; $\widehat{OAE} = 2\,\widehat{AEI}$;
$\widehat{AOI} = 133°$; AE = 6 cm et AO = 4 cm
1) Construire AEIO.
2) Les sommets du quadrilatère AEIO appartiennent-ils au même cercle ?

Cercle et triangle rectangle

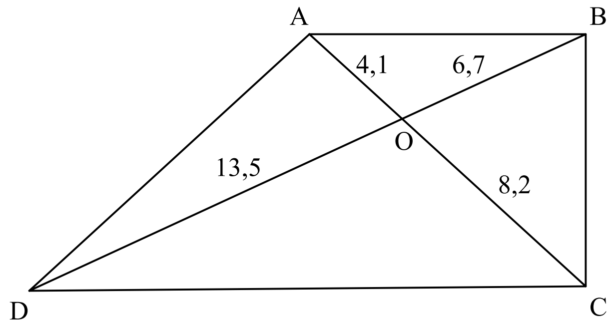
XV. Lorsqu'un corps est lancé sans vitesse initiale, sa chute suit la loi :
$d = \frac{1}{2}gt^2$ où g est une constante non nulle, t la durée de la chute en secondes et d la distance parcourue en mètres.
Le mouvement est-il uniforme ?

Proportionnalité

Troisième

XVI Le quadrilatère ABCD est-il un trapèze ?

Théorème de Thalès



XVII. Les nombres 8 ;13 et 9/2 peuvent-ils être les images respectives de 0 ; -1 et 3/5 par une fonction affine ?

Fonction affine et équation

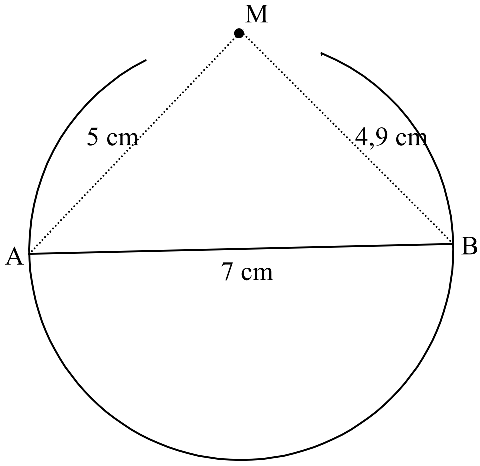
XVIII. Les quotients suivants sont-ils égaux ?

$$\frac{941\ 664}{665\ 857} \text{ et } \frac{665\ 857}{470\ 832}$$

Arithmétique

Raisonnements par l'absurde « en cascade »

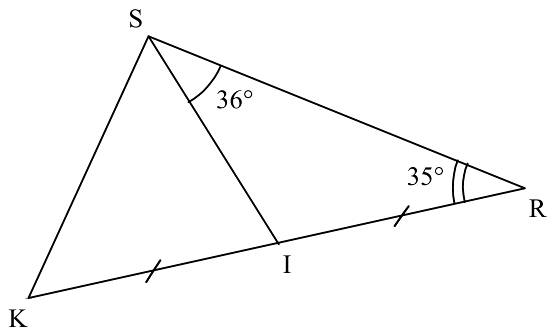
XIX. Le point M appartient-il au cercle de diamètre [AB] ?



Cercle et triangle rectangle

Théorème de Pythagore ...

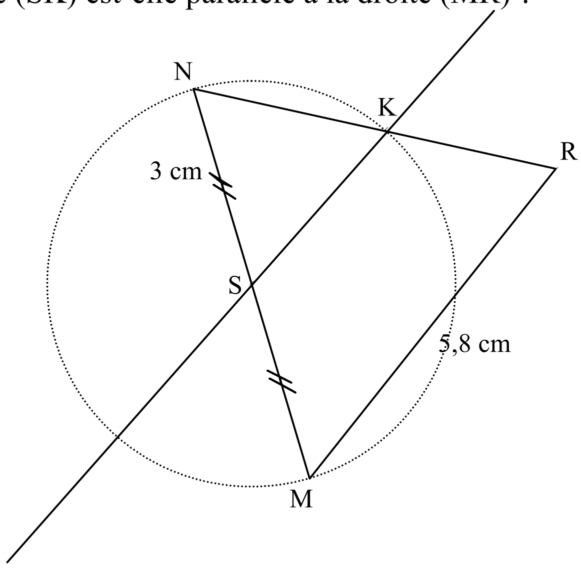
XX. Le point K est le symétrique du point R par rapport au point I.
Le triangle KSR est-il rectangle en S ?



Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Triangle isocèle ...

XXI. Le point M est le symétrique du point N par rapport au point S.
La droite (NR) recoupe le cercle de diamètre [NM] en K.
La droite (SK) est-elle parallèle à la droite (MR) ?



Droite des milieux dans un triangle

Cercle et triangle rectangle

Médiatrice d'un segment ...

Sixième

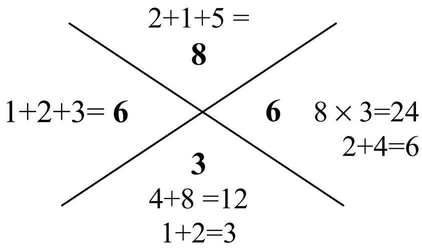
I. *Multiplication des décimaux*

Pierre affirme : « Si je multiplie deux décimaux entre eux, le produit est plus grand que chacun des deux facteurs :
$3 \times 2 = 6$; $6 > 2$ et $6 > 3$
$4{,}8 \times 5{,}1 = 24{,}48$; $24{,}48 > 4{,}8$ et $24{,}48 > 5{,}1$
$16{,}2 \times 7 = 113{,}4$; $113{,}4 > 16{,}2$ et $113{,}4 > 7$. »

Est-ce vrai ?

II. *Multiplication des décimaux*

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2 & 1 & 5 \\ & \times & & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 7 & 2 & 0 \\ & 8 & 6 & 0 & \bullet \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$



« J'ai vérifié ma multiplication en faisant la preuve par neuf. Je suis sûre qu'elle est juste. » dit Marie.
« Non, elle pourrait être fausse. » répond Jean.

Qui a raison ?

III. *Multiples et diviseurs*

Voici une phrase :
« Si la somme des chiffres d'un nombre entier naturel est un multiple de 6, alors le nombre est un multiple de 6. »
Exemples : 42, 84.

Cette phrase est-elle vraie ?

IV. *Quotient*

1) Vérifier les égalités suivantes : $\dfrac{2}{2} = \dfrac{2+15}{2+15} = \dfrac{2+6}{2+6} = \dfrac{2+45}{2+45}$

2) Est-ce que, si on ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur d'une fraction, on obtient une fraction égale ?

V. *Périmètre et aire*

Vrai ou faux ?

1) Si deux rectangles ont le même périmètre, alors ils ont la même aire.

2) Si deux rectangles ont la même aire, alors ils ont le même périmètre.

Cinquième

VI. Vrai ou faux ?

Tester une égalité

1) Si $x = 15$ et $y = 12$, alors $2x + y = 42$.

2) Si $2x + y = 42$, alors $x = 15$ et $y = 12$.

VII. 1) Prouver que : si deux nombres entiers sont multiples de 3, alors leur somme et leur différence sont multiples de 3.

Factorisation

2) Si la somme de deux nombres entiers est multiple de 3, les deux entiers sont-ils multiples de 3 ?

3) Si la différence de deux nombres entiers est multiple de 3, les deux entiers sont-ils multiples de 3 ?

VIII. 1) Prouver que le produit de deux multiples de 42 est un multiple de 42.

Factorisation

2) Si le produit de deux entiers est multiple de 42, les deux nombres sont-ils multiples de 42 ?

IX. Vrai ou faux ?

Multiple et diviseur

Pour tout entier naturel n, l'entier $n \times n - n + 11$ n'admet que deux diviseurs.

X. 1) Démontrer que :

Périmètre et aire

- Si on double les dimensions d'un rectangle, alors on double son périmètre.
- Si on triple les dimensions du rectangle, alors on triple son périmètre.

Généraliser la propriété.

2) La propriété reste-t-elle vraie pour les aires ?

XI. Vrai ou faux ?

Quadrilatères particuliers

1) Si un quadrilatère a trois côtés de même mesure, alors c'est un losange .

2) Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

3) Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

XII. 1) Démontrer que si un nombre est multiple de 60, alors il est multiple de 6 et de 15.

Multiple et diviseur

2) La réciproque est-elle vraie ?

Quatrième

XIII. Vrai ou faux ?

Soit a et b deux entiers relatifs.

1) $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$

2) $10^a + 10^b = 10^{a+b}$

3) $10^a - 10^b = 10^{a-b}$

Puissance

XIV. L'ordinateur que Jean a acheté à Noël a augmenté de 10% en janvier puis diminué de 10% en février.
Jean est ravi, il pense n'avoir rien perdu en l'achetant à Noël.

Est-ce vrai ?

Pourcentage

XV. Lucie écrit au tableau :
« Pour obtenir l'inverse d'une somme, on additionne les inverses de chacun des termes. »

Êtes-vous d'accord avec Lucie ?

Quotient

XVI. 1) Démontrer que :

Si deux nombres sont multiples de 37, alors leur somme est multiple de 37.

2) La réciproque est-elle vraie ?

Factorisation et développement

XVII. Vrai ou faux ?

1) Si $x < 12$ et $y < 17$, alors $2x + 4y < 92$.

2) Si $2x + 4y < 92$, alors $x < 12$ et $y < 17$.

Tester une inégalité

XVIII. Soit m et n deux nombres.
m a pour arrondi 13 et n pour troncature 12.

Peut-on affirmer que m est supérieur à n ?

Encadrements

Troisième

XIX. Vrai ou faux ?

Racine carrée

Soit a et b deux nombres positifs.

1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$

4) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b} \quad (a > b)$

XX. Soit (AB) et (CD) deux droites sécantes en O telles que :
OA = 2 cm, OB = 5 cm, OC = 4 cm, OD = 10 cm.

Théorème de Thales

A-t-on toujours (AC) parallèle à (BD) ?

XXI. 1) d et d' sont deux droites perpendiculaires en O.
Démontrer que la symétrie d'axe d suivie de la symétrie d'axe d' est la symétrie de centre O.

Transformations

2) L'image d'une figure par deux symétries axiales successives est-elle toujours l'image de cette figure par une symétrie centrale ?

XXII. Vrai ou faux ?

Inéquation

Tous les nombres positifs vérifient l'inégalité :
$4x + 1 > -x + 7$

Sixième

I. Soit d une droite et A et B deux points distincts.
Déterminer, en fonction des positions des points et de la droite, l'existence et le nombre de points S de la droite tels que le triangle ABS soit isocèle en S.

Médiatrice d'un segment

II. Deux nombres entiers distincts de 0 et de 1 ont pour somme 11.
Prouver que lorsqu'on multiplie chacun d'eux par 9, on obtient alors deux nombres formés des mêmes chiffres.

Multiplication des entiers

III. x, y, z et t sont quatre décimaux qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x < y < z \\ z < x + y \\ t < y - x \end{cases}$$

Attribuer à chacun de ces nombres sa valeur parmi :
4,2 13,5 17,2 9,8

Comparaison de décimaux

IV. Une boite en forme de parallélépipède rectangle a pour dimensions
25 cm, 30 cm, 40 cm.
On souhaite la remplir de pavés de dimensions 4 cm, 4 cm et 5 cm tous disposés de façon analogue.

Comment disposer les pavés dans la boîte pour qu'il en rentre le plus grand nombre possible ?

Pavé droit

V. J'ai placé les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases du carré ci-dessous.
J'ai ensuite effectué les produits suivant la direction de chacune des flèches et j'ai inscrit les nombres obtenus.
Une manœuvre malencontreuse sur le clavier de mon ordinateur a effacé les neuf nombres.

Multiples et diviseurs

Peut-on m'aider à les retrouver ?
Donner toutes les solutions possibles.

			→ 54
			→160
			→ 42
↓	↓	↓	
56	90	72	

VI. Pour chaque ligne, dans les réponses proposées, il y a un résultat exact. Le retrouver, sans effectuer les multiplications.

Multiplication des décimaux

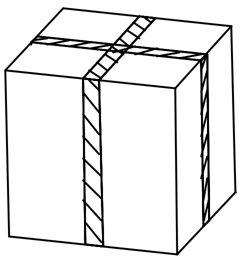
	Résultat A	Résultat B	Résultat C	Résultat D
12,86 × 7,6	10,426	97,736	97,732	97,66
142,15 × 3,8	208,7	54,017	540,17	540,172
0,025 × 4,7	0,1175	1,175	0,1174	0,0175

VII. Le club des cinq est formé trois filles âgées respectivement de 11 ans, 12 ans et 13 ans et de deux garçons de 11 ans et 13 ans.
Julie et Camille ont le même âge. Pat est plus jeune que Claude et du même sexe que Camille. Dominique est le cinquième membre.

Comparaison des nombres entiers

Quel est l'âge et le sexe de chacun des membres du club ?

VIII. Un jeune garçon a ficelé avec un ruban un paquet en forme de cube comme l'indique le schéma.
Il veut maintenant faire de même avec un pavé droit de dimensions 35 cm, 28 cm et 19 cm.
Sur quelle face doit-il faire le nœud pour utiliser le moins de ruban possible ?



Pavé droit

Cinquième

IX. Ranger dans l'ordre croissant, sans aucun calcul :

$\frac{1}{5}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{1}{4}$; 1 ; $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{4}$

Comparaison de quotients

X. p, q et t sont trois fractions non nulles, strictement inférieures à 1 et de dénominateur 9 vérifiant :

$$\begin{cases} p+q+t=\frac{7}{9} \\ p\quad q\quad t \geq \frac{1}{81} \\ p\quad q = t \end{cases}$$

Déterminer p, q et t. Donner toutes les solutions possibles.

Opérations sur les fractions

XI. Soit a, b et c trois entiers relatifs.

On a : $\begin{cases} abc = 32 \\ a < b < c \\ bc < 0 \end{cases}$

Déterminer toutes les solutions possibles.

Comparaison des décimaux relatifs

XII. Existe-t-il toujours un cercle passant par trois points du plan ?

Médiatrice d'un segment

XIII.
1) Construire un triangle JKL isocèle tel que $\widehat{\text{KJL}} = 40°$ et JK = 5 cm. Donner toutes les solutions possibles.
2) Pour chacune des solutions, calculer la mesure de chacun des angles.

Triangles particuliers

XIV. Démontrer que tout triangle isocèle dont un angle mesure 60° est un triangle équilatéral.

Triangles particuliers

XV. On veut construire un cylindre dont le volume est le plus grand possible et la face latérale a pour patron un rectangle de dimensions 10 cm et 8 cm.
Quelles sont les dimensions d'un tel cylindre ?

Cylindre

XVI. Soit d la médiatrice d'un segment [AB] et M un point. Comparer, en fonction de la position du point M, les longueurs AM et BM.

Médiatrice et inégalité triangulaire

XVII. Déterminer, dans les différents cas, le nombre d'axes de symétrie d'une figure formée :
1) d'un point et d'une droite,
2) d'un point et d'un cercle,
3) de deux droites,
4) de deux cercles de même rayon.

Symétries centrale et axiale

Quatrième

XVIII. m, n, p et q sont quatre nombres entiers relatifs vérifiant :

$$\begin{cases} m+n+p+q=-8 \\ m+n=-7 \\ mn=12 \\ pq=-21 \end{cases}$$

Peut-on retrouver ces quatre nombres ?
Donner toutes les solutions possibles

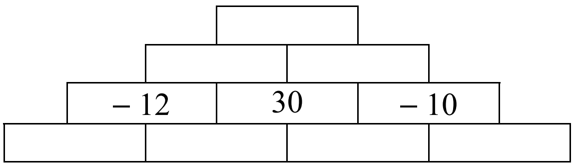
Opération sur les entiers relatifs

XIX. Des fractions distinctes de dénominateur 9 et inférieures à 1 ont été placées dans les cases du tableau ci-dessous. Les produits ont été effectués suivant la direction de chacune des flèches.
Pouvez-vous retrouver le contenu de chaque case ?
On donnera toutes les solutions possibles.

			$\rightarrow \frac{280}{729}$
		$\frac{2}{9}$	$\rightarrow \frac{48}{729}$
			$\rightarrow \frac{3}{81}$
$\downarrow$ $\frac{16}{81}$	$\downarrow$ $\frac{20}{729}$	$\downarrow$ $\frac{14}{81}$	

Multiplication des fractions

XX. Le contenu d'une case s'obtient en multipliant les contenus des deux cases situées en dessous.
Compléter la pyramide par des nombres entiers relatifs.
Donner toutes les solutions.



Multiplication des nombres relatifs

XXI. Démontrer que :
1) Si deux nombres sont multiples de 3, alors leur produit est multiple de 3.
2) Si deux nombres ne sont pas multiples de 3, alors leur produit n'est pas multiple de 3.

Factorisation et développement

XXII. Soit P et Q deux points et d une droite du plan.
Déterminer, suivant les positions des points P, Q et de la droite d, le nombre de points R, situés sur la droite d, tels que le triangle PQR soit isocèle en Q.

Distance d'un point à une droite

Troisième

XXIII. Les phrases suivantes sont-elles vraies ?

1) Si un nombre est multiple de 3, alors son carré est multiple de 3.

2) Si un nombre n'est pas multiple de 3, alors son carré n'est pas multiple de 3.

Factorisation et développement

XXIV. Pour tout entier n, l'entier $n\,(n+1)\,(2n+1)$ est-il toujours un multiple de 3 ?

Arithmétique, développement et factorisation

XXV. Quatre nombres entiers vérifient les conditions suivantes :

- leur somme est 39,
- la somme des deux derniers est 20,
- le premier est un multiple de 3,
- si on divise le troisième par le second, on obtient pour quotient 2 et pour reste 1.

Déterminer toutes les solutions possibles.

Système ou inéquation