1 Polynômes

Exercice 1 - Continuité des racines d'un polynôme, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Soit (P_k) une suite de polynôme scindés de $K[X]$, de degré N, qui tend vers un polynôme P scindé de degré N.
On munit $K[X]$ de la norme $\|.\|_1$ définie de la manière suivante :

$$\|a_0 + a_1X + ... + a_nX^n\|_1 = |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|$$

1. Montrer que l'on peut supposer P_k et P unitaire (ce que l'on supposera à partir de maintenant).
2. Montrer que si z est une racine de P alors $|z| \leq \|P\|_1$.
3. En déduire que l'ensemble des racines des P_k est borné.
4. On va démontrer la propriété $(\mathcal{P})$: Si z est une racine de P de multiplicité p alors quelque soit ε, pour n assez grand, $\mathcal{B}(z, \varepsilon)$ contient exactement p racines de P_k. On raisonne par l'absurde en supposant vraie la négation de $(\mathcal{P})$.
   (a) Montrer que l'on peut alors construire une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
   $$\forall k \geq 1,\ |z - x_{N,\psi(k)}| \geq |z - x_{N-1,\psi(k)}| \geq ... \geq |z - x_{p,\psi(k)}| \geq \varepsilon$$
   où $x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{N,k}$ sont les N racines de P_k
   (b) Montrer que l'on peut supposer que les $(x_{i,\psi(k)})_k$ sont des suites convergentes pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.
   (c) On note $y_i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{i,\psi(k)}$.
   Montrer que $P_{\psi(k)}$ tend vers $\prod\limits_{i=1}^{N}(X - y_i)$ et en déduire une contradiction.
5. Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse "P est scindé".

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 2 - Théorème d'Auerbach
Soit E un espace vectoriel normé de dimension n. On pose $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$.

1. Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, montrer la formule :
$$e_i^*(x) = \frac{\det(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n)}{\det(e_1, e_2, ..., e_n)}$$
2. Montrer qu'il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E, avec $\|e_i\| = 1$ pour tout i, tels que pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S^n$,
$$|\det(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq |\det(e_1, e_2, ..., e_n)|$$
3. En déduire que $\|e_i^*\| = 1$ pour tout i (théorème d'Auerbach)

Exercice 3 - Etude d'une norme de matrice
Soit E un espace hermitien muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i$ et de la norme associée.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A \colon \begin{array}{rcl} E^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & \langle Ax, y\rangle \end{array}$

   Que vaut $\displaystyle\sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} |f_A(x,y)|$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on considère la matrice de Hilbert H_n, définie par $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j}$.

   Le but est de montrer que $\|H_n\| \leq \pi$ pour tout n.

   (a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $2\pi-$périodique définie par $\phi(t) = i(\pi - t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier c_n de ϕ, et calculer $\|\phi\|_\infty$.

   (b) Montrer que pour tout $(y_1, y_2, ..., y_n)$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans $\mathbb{C}^n$

   $$\sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{y_j x_k}{j+k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} y_j e^{-ijt}\right)\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ikt}\right)\phi(t)dt$$

   (c) En déduire que $\displaystyle\left|\sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{y_j x_k}{j+k}\right| \leq \|\phi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{1/2}$ puis que $\|H_n\| \leq \pi$

Exercice 4 - Exponentielle de matrice et applications, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, justifier la convergence de la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$.

   On note alors $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

2. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A (qui dépend de A). Peut-il exister un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$ pour tout A ?

3. Montrer que :

   (a) Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

   Montrer que ce dernier résultat n'est pas vrai en général (considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

   (b) $\exp(A) \in Gl_n(\mathbb{K})$

   (c) $\exp(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n$ et $\exp(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n$ où $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n$) désigne l'espace vectoriel des matrices symétriques (resp. hermitiennes)

   (d) $P^{-1}\exp(A)P = \exp(P^{-1}AP)$

   (e) Si A est trigonale alors $\exp(A)$ est trigonale.

   (f) $Sp(\exp(A)) = \exp(Sp(A))$ et $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$

4. L'application $\exp \colon \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \exp(A) \end{array}$ est-elle injective ?

Exercice 5 - Déterminant de Gram et distance d'un point à un sous-espace

Le déterminant de Gram d'une famille $v_1, \ldots, v_n$ de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension finie est noté $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n)$ et est défini par :

$$\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n) = \det(\langle v_i, v_j \rangle_{i,j})$$

1. Montrer que $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n)$ est nul si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base (quelconque) de F. On décompose tout $v \in E$ sous la forme $v = v' + v''$ avec $v' \in F$ et $v'' \in F^{\perp}$. Montrer que :

$$\mathrm{Gram}(v, f_1, \ldots, f_m) = \|v''\|^2 \, \mathrm{Gram}(f_1, \ldots, f_m)$$

et en déduire que :

$$d(v, F)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(v, f_1, \ldots, f_m)}{\mathrm{Gram}(f_1, \ldots, f_m)}$$

où $d(v, F)$ désigne la distance de v à F.