$\boxed{E \text{ désignera un } \mathbb{K}\text{−espace vectoriel de dimension finie } n\ (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})}$

1 Quelques rappels sur la réduction des endomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Toutes les définitions/propriétés sur f se transposent au cas matriciel.

Définition 1 (Principales définitions/propriétés)

- *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **une valeur propre** de f s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$.*
  *x est un **vecteur propre** associé à λ.*
- *L'ensemble des vecteurs propres associés à λ est un sous espace vectoriel de E noté E_λ.*
- *Le **polynôme caractéristique** de f est $P_f = \det(f - X.Id_E)$*
- *λ **est valeur propre** $\iff \boxed{P_f(\lambda) = 0}$*
- *Si λ est valeur propre, alors P_f est de la forme $P_f = (\lambda - X)^{m_\lambda} Q(X)$ où $Q(\lambda) \neq 0$. L'entier m_λ est **l'ordre de multiplicité** de la valeur propre λ.*
- *f est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E formé de vecteurs propres. Dans cette base la matrice de f est alors diagonale.*

Propriété 2 $\boxed{\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda}$

Définition 3 (Polynôme d'endomorphisme)
Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, avec $P(X) = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k$, on note $P(f)$ l'endomorphisme définie par $P(f) = \sum_{k=1}^{p} a_k f^k$ où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ ...f}_{k \text{ fois}}$. On notera que l'on a $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

Théorème 4 (Cayley-Hamilton)
f annule son polynôme caractéristique : $P_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Propriété 5 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *f est diagonalisable*
- *P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout racine λ_i $(i = 1..p)$ de P_f on a $\dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$*
- *$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$*
- *f annule un polynôme scindé à racines simples.*

Définition 6 (Trigonalisation)
*f est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.*

Propriété 7
Si le polynôme caractéristique de f est scindé alors f est trigonalisable.

2 Exercices de révision

Exercice 1 - Diagonalisation/trigonalisation
Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - Matrices compagnons

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ n éléments de $\mathbb{K}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Déterminer $P_M(X)$

Exercice 3 - Diagonalisation simultanée
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

1. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel stable par f alors $f_{|V}$ est aussi diagonalisable.
2. En déduire que si $g \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme diagonalisable qui commute avec f ($f \circ g = g \circ f$), alors f et g sont diagonalisable dans une même base.
3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et telle que $AB = BA$.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Exercice 4 - Diagonalisation et sous-espaces stables (✍)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'on a les équivalences suivantes :
(i) f est diagonalisable.
(ii) Tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par f.

3 Un peu de topologie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (✍)

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Ceci signifie que les topologies induites par les normes sont égales et que l'eu peut s'affranchir de préciser la norme utilisée, lorsqu'on parle de convergence, d'adhérence, d'intérieur, etc...
En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{n^2}$, on a par exemple :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{i,j}| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \qquad \|A\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$$

On définit aussi une norme matricielle N subordonnée à une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{K}^n$ en posant :

$$N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

L'étude de ces normes feront l'objet d'exercices pour une autre séance.

Exercice 5 - Densité de $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (✍)

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P_{AB}(X) = P_{BA}(X)$.

Exercice 6 - Etude topologique de l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}(\mathbb{K})$ (✍)

On suppose $n \geq 2$ et on commence par un résultat négatif :

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ n'est pas dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P_A(X) = X^n + 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$ (on pourra penser aux matrices compagnons...).
2. On va supposer, par l'absurde, que $A \in \overline{\mathcal{D}}$ et qu'il existe une suite (A_p) de $\mathcal{D}$ convergeant vers A.
   (a) Quelles sont les limites des suites $(A_p^n)_p$ et $(tr(A_p))_p$?
   (b) Soit λ_p une valeur propre de A_p et X_p un vecteur propre associé. Montrer que
   $$\lambda_p^n + 1 \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
   (c) En raisonnant sur la parité de n, déterminer la limite de $(\lambda_p)_p$ puis celle de $(\mathrm{Tr}(A_p))_p$ pour $p \to +\infty$, et aboutir à une contradiction.

   On va en fait démontrer en 4. que l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est égal à l'ensemble des matrices trigonalisables.

   ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

   On a par contre le résultat suivant :

   $$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

3. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite de matrices trigonales à coefficients diagonaux distincts qui converge vers M. Conclure.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

$$\boxed{\text{L'adhérence de } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ est égal à l'ensemble } \mathcal{T} \text{ des matrices trigonalisables.}}$$

4. En reprenant le raisonnement fait en 3. pour une matrice $M \in \mathcal{T}$, montrer que $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$.
5. Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit de démontrer que $\mathcal{T}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   (a) Soit $\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \mathcal{T} & \to & \mathbb{R}^n \\ & M & \mapsto & (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \end{array}$ où les $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de M rangées dans l'ordre.
   Soit $T \in \overline{\mathcal{T}}$ et $(T_p)_p$ une suite de $\mathcal{T}$ qui tend vers T.
   Montrer que l'on peut se ramener au cas où $(\varphi(T_p))_p$ est une suite convergente. (on remarquera que $\|\varphi(M)\|_\infty \leq \|M\|$). On notera $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ la limite de $(\varphi(T_p))_p$.
   (b) On note $\varphi(T_p) = (\lambda_{1,p}, \lambda_{2,p}, ..., \lambda_{n,p})$.
   Montrer que $P_T = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_n)$ et conclure.
   Attention à l'apparente facilité de cette question....

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

$$\boxed{\text{Etude de l'intérieur de } \mathcal{D}(\mathbb{C})}$$

6. Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. On note $\mathcal{U}$ l'intérieur de $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ et on va montrer que
   $$\mathcal{U} = \mathcal{D}^1$$
   où $\mathcal{D}^1$ est l'ensemble des matrices diagonalisable à spectre simple (toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1).

(a) Montrer que $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}^1$.
Indication : Prendre une matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propre double et montrer qu'elle ne peut pas être dans $\mathcal{U}$

(b) Montrer que $\mathcal{D}^1$ est ouvert.
Indication : On pose $P(X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$, *on prend* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et note* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ *les valeurs propres de* M *rangées dans l'ordre.*

- *Montrer que* P *est un polynôme en* $\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_n$, *les* n *polynômes symétriques élémentaires de* $\mathbb{C}[X_1, X_2, ..., X_n]$. *[On peut admettre ce point qui n'est pas officiellement au programme de l'agrégation interne...]*
- *Montrer que les* $\sigma_i(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ *dépendent polynomialement des coefficients de* M.
- *En déduire que* $\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & M & \mapsto & \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j) \end{array}$ *est continue et conclure.*

(c) En déduire que $\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{D}^1}$.