Préparation à l'agrégation interne
A. DA SILVA **Séance n° 1** Année 2007

1 Quelques éléments de bibliographie

1.1 Les généralistes

Il est important d'avoir en main un ou deux livres assez complets de premier cycle

- ➢ Arnaudiès-Fraysse Lelong-Ferrand [tomes algèbre 1 et 2].
- ➢ B.Gostiaux, Cours de mathématiques spéciales.
- ➢ Xavier Gourdon, Les maths en tête.

1.2 Les ouvrages de concours

- ➢ Roudier,Algèbre linéaire : Cours et exercices CAPES et Agrégation.
- ➢ Gianella-Nicolas, Oraux X-ENS, algèbre 1 et 2 : Une bonne source de développement.
- ➢ Rombaldi, Thème pour l'agrégation interne.
- ➢ Tauvel, Exercices pour l'agrégation (algèbre 2).
- ➢ Ruaud-Warusfel, Exercices pour l'agrégation (algèbre 3).
- ➢ Beck-Peyré : Objectif agrégation (pour l'externe mais de nombreuses choses utilisables pour l'interne).
- ➢ Perrin, Cours d'algèbre : idem précédent.

1.3 Ouvrages plus spécialisés

- ➢ Jean Fresnel, Les matrices.
- ➢ Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
- ➢ Rombaldi, Analyse matricielle.
- ➢ Meimné-Testard, Introduction aux groupes de Lie : Livre de bon niveau mais les trois premiers chapitres donnent pas mal de résultats concernant la plupart des groupes topologiques usuels ($\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $Gl_n(\mathbb{R})$ etc...)

---

2 Révisions : Espaces vectoriels, morphismes, matrices, rang, déterminants...

Les exercices qui suivent ont pour but de revoir les principales notions d'algèbre linéaire. Ils sont de niveau L1-L2. Les exercices ou questions marqués d'un (✍) seront suceptibles d'être corrigés à la première séance, mais toute autre proposition est la bienvenue.

Exercice 1 - Zoologie des espaces vectoriels
Dans les cas suivants, dire (et démontrer si besoin est) si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Préciser s'il est de dimension finie et en donner une base dans l'affirmative.

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, (✍)
3. $E = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
4. $E = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

5. $E=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
6. $E=\mathbb{K}_n[X]=\{P\in\mathbb{K}[X],\ deg(P)\leq n\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
7. $E=\mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{K})$, $n\in\mathbb{N}$, $\quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
8. $E=c_0(\mathbb{R})=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$, $\quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$
9. $E=\ell^1(\mathbb{R})=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|<\infty\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
10. $E=\ell^\infty(\mathbb{R})=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sup\limits_{n\in N}|u_n|<\infty\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
11. $E=\mathcal{P}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\text{paire}\}$ (respectivement $E=\mathcal{I}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\text{impaire}\}$), $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
12. $E=\mathcal{A}\text{ff}([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R},\ \text{affine par morceaux}\}$, $\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$ (✍)

Exercice 2 - Quelques familles libres de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Montrer que dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont libres :

1. $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^{\lambda x}$
2. $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto|x-\lambda|$.

Exercice 3 - Une famille libre de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (✍)
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Démontrer que $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}}$ forme une famille libre de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Exercice 4 - Somme directe d'un hyperplan et d'une droite
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et $\mathcal{D}$ une droite vectoriel de E non contenue dans H. Montrer que $E=H\oplus\mathcal{D}$

Exercice 5 - Sommes directes et projections associées (✍)

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}$) est l'ensemble des foncions paires (resp.impaires). Déterminer la projection p (resp q) de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{I}$) parallèlement à $\mathcal{I}$ (resp $\mathcal{P}$)

2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
   Montrer que $\mathbb{R}_n[X]=E_0\oplus E_1\oplus...\oplus E_n$ où $E_k=\text{Vect}((X-\alpha)^k)$, $0\leq k\leq n$.
   On note p_k la projection sur E_k parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{i\neq k}E_i$.
   Si $Q\in\mathbb{R}_n[X]$, déterminer $p_k(Q)$

Exercice 6 - Détermination pratique d'une projection
On considère $E=\mathbb{R}^4$, $F=\text{Vect}(\underbrace{(1,-1,0,2)}_{e_1},\underbrace{(1,-1,1,1)}_{e_2})$ et G le sous espace de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\begin{cases} x-y+z-t=0\\ 2x-3y+4z-t=0\end{cases}$$

1. Montrer que $G=\text{Vect}(e_3,e_4)$ où $e_3=(1,2,1,0)$ et $e_4=(2,1,0,1)$ et que $E=F\oplus G$
2. Soit p_F la projection de E sur F parallèlement à G.
   Déterminer l'expression de la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7 - Application de la formule du rang (✍)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

Exercice 8 - Inverse d'un automorphisme, d'une matrice (✍)
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Montrer que M est inversible.
2. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$
   Montrer que φ est un automorphisme et donner son inverse.
3. En déduire M^{-1}.

3 Dualité

Exercice 9 - (✍)

1. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, rappeler la définition de l'espace dual de E, noté E^*. Donner sa dimension rappeler la définition de la base duale.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension $p < n$, on considère $F^{\perp} = \{f \in E^* / f_{|F} = 0\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E^*. Quelle est sa dimension ?
3. **Application 1 : Polynômes de Lagrange**
   Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient les polynômes $P_k = \displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(X - a_i)}{(a_k - a_i)}$ où les a_k sont des nombres réels distincts.
   Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ forme une base de E et donner la base duale associée $(P_0^*, P_1^*, ..., P_n^*)$.

4. **Application 2 : Calcul de sommes du type $\sum_{k=0}^{N} P(k)$**
   Soient $E = R_n[X]$ et $P_0 = 1$, $P_k = \dfrac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 1$.

   (a) Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ forme une base de E.
   (b) Soient $\Delta : E \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'opérateur de différence défini par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que la base duale $(P_0^*, P_1^*, ..., P_n^*)$ est définie par
   $$P_k^*(Q) = \Delta^{(k)}(Q)(0) \text{ pour } Q \in E$$
   où $\Delta^{(k)}$ désigne l'itérée k-ième de Δ, avec la convention $\Delta^{(0)} = Id_E$. (*Indication : remarquer que $\Delta(P_k) = P_{k-1}$ pour $k \geq 1$*)
   (c) Montrer que si $P \in E$ alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \Delta^{(k)}(P)(0).P_k$ où $d = deg(P)$
   (d) En déduire que si $P \in E$ il existe $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P = \Delta(Q)$.
   (e) Montrer alors que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} P(k) = Q(N+1) - Q(0)}$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^2$

4 Quelques thèmes d'étude

Exercice 10 - Endomorphismes stabilisant certains sous-espaces vectoriels
Soit E un espace vectoriel de dimension n. On rappelle que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une **homothétie** s'il existe λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.
On dit de plus que f **stabilise** V si $f(V) \subseteq V$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $(x, f(x))$ soit liée pour tout x. Montrer que f est une homothétie (on pourra considérer deux éléments x et y et distinguer les cas où la famille (x, y) est libre ou liée).
2. On suppose maintenant que f stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension k, où $1 < k < n$.
   (a) Soit $(e_1, e_2, ..., e_{k-1})$ une famille libre. Montrer qu'il existe deux éléments x et y tels que $(e_1, e_2, ..., e_{k-1}, x, y)$ est libre.
   (b) Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension $k-1$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension k.
   (c) En déduire que f stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension $k-1$.
   (d) Conclure que f est une homothétie.

Exercice 11 - Liberté d'une famille de fonctions (✍)
Soit X un ensemble et $f_1, f_2, ...f_n$ n éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que :

$$(f_1, f_2, ...f_n) \text{ est libre dans } \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in X \;/\; \det((f_i(x_j))_{1 \le i,j \le n}) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Indication : Pour la réciproque, procéder par récurrence sur n.

Exercice 12 - Une matrice de trace nulle est un crochet de Lie (✍)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une matrice de trace nulle.
   (a) Pourquoi A ne peut-elle pas être la matrice d'une homothétie ?
   (b) Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{K}^n$ tel que (e, Ae) soit libre.
   (c) En déduire qu'il existe pour $n \geq 2$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que :

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   (d) En raisonnant par récurrence sur n, démontrer alors que tout matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
   Remarque : Ce résultat ne subsiste pas si on prend des matrices à coefficients dans un corps de caractéristique non nulle.
2. On pose pour toute matrice B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $[B, C] = BC - CB$ (crochet de Lie). On dira que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un crochet de Lie s'il existe B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = [B, C]$.
   (a) Montrer que si M est un crochet de Lie, $\mathrm{Tr}(M) = 0$
   (b) Montrer que si M est un crochet de Lie alors toute matrice semblable à A en est un aussi.

3. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales et $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des matrices de diagonale nulle. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $\phi_B \colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ C & \mapsto & [B, C] \end{array}$
   (a) Que valent $\dim(\mathcal{D})$ et $\dim(\mathcal{D}_0)$?
   (b) On suppose que $B \in \mathcal{D}$ (on pose $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, ..., b_n)$). Montrer que l'on peut choisir B telle que $\phi_B(C) = 0 \Longleftrightarrow C$ diagonale.
   (c) Que vaut alors $\ker(\phi_B)$?
   (d) En déduire que $\mathrm{Im}(\phi_B) = \mathcal{D}_0$
4. Établir alors le résultat suivant : "**Toute matrice de trace nulle est un crochet de Lie**".

(D'après ENS Lyon)