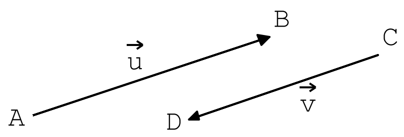
VECTEURS

***Objectifs** : Condition de colinéarité de deux vecteurs : xy' – x'y = 0.*
Vecteur directeur d'une droite. Equation cartésienne d'une droite.
Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.
Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point.
Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne.
Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problème.

I- Vecteurs colinéaires

Définition : 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sont **colinéaires** s'ils ont **la même direction.**



Les **vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires si et seulement si** les **droites** (AB) et (CD) sont **parallèles** ou confondues.

Propriété : **Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires alors il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$** (et réciproquement).

Remarque : Par convention, on dit que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

Exercice 1: Le plan est muni d'un repère (O ; I, J). On considère les points A(-2 ; 3), B(4 ; -1) et C(1 ; 4). Déterminer le réel y tel que le point D(4 ; y) soit tel que ABDC est un trapèze, de bases parallèles [AB] et [CD].

Relation de colinéarité : (ROC) Dans le plan muni d'un repère (O ; I, J). Soient deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ***xy' – x'y =0***

Exercice 2 : a) Les vecteurs $\vec{u}$ (12 ; -16) et $\vec{v}$ (-9 ; 12) sont –ils colinéaires ? Justifier.
b) Les vecteurs $\vec{u}$ (2 ; 6) et $\vec{v}$ (3 ; 4) sont –ils colinéaires ? Justifier.

II-Equations de droite

Rappel **:** Toute droite (d) du plan admet une unique **équation réduite** de la forme :

- $x = k$ pour une droite parallèle à l'axe des ordonnées. (k nombre réel)
- $y = mx + p$ pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

on dit que m est le coefficient directeur de (d), et p l'ordonnée à l'origine.

Exercice 3 : Déterminer l'équation réduite de la droite (d) suivante : 12x – 4y + 14 = 0, et la représenter dans un repère.

Définition : Toute droite d'un plan admet une infinité **d'équations cartésiennes** du type $ax + by + c = 0$ ou a, b et c sont des réels et x et y des coordonnées.

Remarque : Une droite possède une infinité d'équations réduites, mais une seule équation réduite.

Exercice 4 : Les équations 2x –4y + 6 = 0 ; x – 2y + 3 = 0 et -x + 2y –3 = 0 sont-elles toutes des équations représentant la même droite ? Le point A (1 ; 2) appartient-il à cette droite ?

Vecteur directeur d'une droite

Un **vecteur directeur** d'une droite (d) est un vecteur non nul dont la direction est celle de (d).
Il y a une infinité de vecteur directeur d'une droite.

(d) : $x = k$ a pour vecteur directeur $\vec{v}$ (0 ; 1)

(d) : $y = mx + p$ a pour vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ; m)

(d) : $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}$ ($-b$; a)

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Exercice 5 : Déterminer un vecteur directeur des droites d'équations : $2x + 3y - 5 = 0$; $y + 4 = 0$; $x - 3 = 0$
$5x - 2y + 4 = 0$.

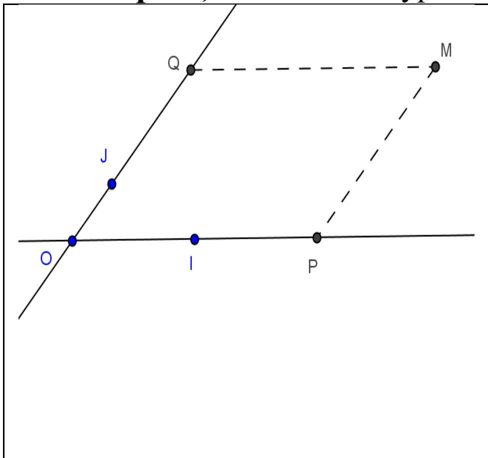
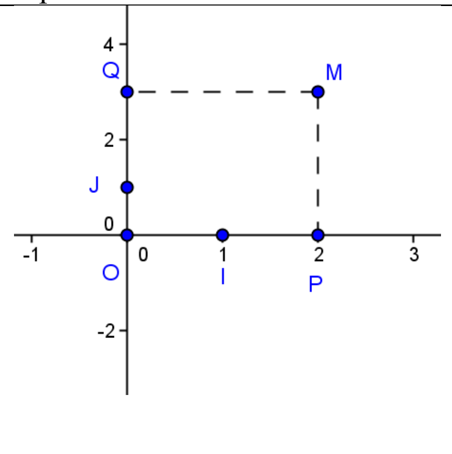
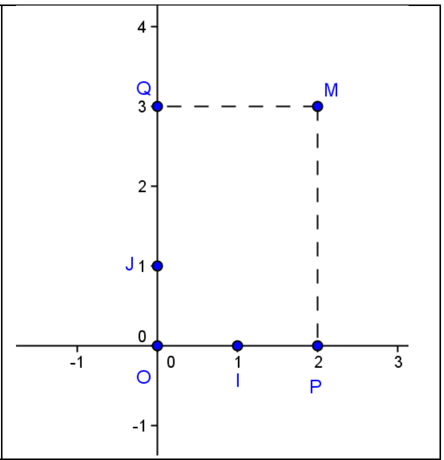
Propriété : La droite (d), passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Exercice 6 : Déterminer l'équation de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;2)$ et passant par A(-3 ; 5).
Même question pour $\vec{u}(0\,;3)$ et A(2 ;6)

Propriété : Deux droites (d) et (d') d'équation cartésienne respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $\boldsymbol{ab' - a'b = 0}$.
Exercice 7 : Les droites d'équations $2x + 3y - 5 = 0$ et $-6x + 4y + 3 = 0$ sont-elles parallèles ?

III- Décomposition d'un vecteur

1) Les repères du plan

Dans le plan, il existe trois types de repère

		
Un repère quelconque (O ; I, J) est tel que le triangle formé par les points OIJ est quelconque.	Un repère orthogonal (O ; I, J) est tel que le triangle formé par les points OIJ est rectangle en O. (OI) $\perp$ (OJ) et OI $\neq$ OJ	**Un repère orthonormé** (ou orthonormal) (O ; I, J) est tel que le triangle formé par les points OIJ est rectangle et isocèle en O. (OI) $\perp$ (OJ) et OI= OJ

Le point O est l'**origine du repère**.
Le point I donne l'unité sur le premier axe nommé axe des abscisses. On a OI = 1 unité.
Le point J donne l'unité sur le second axe nommé axe des ordonnées. On a OJ = 1 unité
A tout point M du plan, on peut associer ses projetés P et Q respectivement sur les axes.
On notera désormais : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. $\left(O\,;\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$ avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires, est un repère du plan.

Soient x et y deux réels, **le point M a pour coordonnées (*x* ; *y*)** dans le repère (O ; I, J) ou $\left(O\,;\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$ équivaut à P(*x* ; 0) et Q(0 ; *y*). *x* s'appelle **abscisse**, et *y* s'appelle **ordonnée**. On note : **M (*x* ; *y*)**
On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
Remarque : sur les figures ci-dessus, M a pour coordonnées (2 ; 3).

2) Existence et unicité d'une décomposition

Propriété : (ROC) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un unique couple (x ; y) de nombres réels tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exercice 8 : ABC est un triangle. Placer D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Que dire alors des points B, C et D ?