Les Suites numériques réelles

Terminale S

I] Suites arithmético-géométriques

Ce sont des suites définies par : $\boxed{u_{n+1} = a\,u_n + b}$ et par la donnée du premier terme u_0.

a) Pour les exemples suivants, tracer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormal, "le chemin de la suite" et observer la convergence éventuelle :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

b) Si a = 0 , la suite est stationnaire à partir du rang 1 et est égale à b.

c) Si a = 1 : **$u_{n+1} = u_n + b$** : cas d'une **suite arithmétique** où on obtient un terme en ajoutant au précédent une constante b appelée raison. Alors

$\boxed{u_n = u_0 + n\,b}$ ou $u_n = u_1 + (n-1)\,b$; $u_p = u_q + (p-q)b$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

$$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}}$$

On peut aussi retenir : $\boxed{\text{Somme des termes} = \frac{\left(n^{bre} \text{ de termes}\right)\times\left(1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}\right)}{2}}$

Propriété : Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il faut que **$u_{n+1} - u_n$ soit une constante.**

Exercice 1 : u est la suite de réels strictement positifs définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$. v est la suite définie par $v_n = 1/u_n$.

a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 ,u_4 puis v_0 , v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .
b) Démontrer que v est une suite arithmétique.
c) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
d) Justifier le sens de variation de la suite v.

Exercice 2 : Calculer la somme des 100 premiers entiers naturels pairs non nuls.

d) Si b = 0 : **$u_{n+1} = a\,u_n$** : cas d'une **suite géométrique** où on obtient un terme en multipliant le précédent par une constante a appelée raison. Alors $\boxed{u_n = u_0\,a^n}$ ou $u_n = u_1\,a^{n-1}$

$u_p = u_q\,a^{p-q}$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad pour\ a \neq 1}$$

On peut aussi retenir : $\boxed{\text{Somme des termes} = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - (\text{raison})^{n^{bre} \text{ de termes}}}{1 - \text{raison}}}$

Propriété : Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut que **$u_{n+1} = q\,u_n$** (ou bien que si $u_n \neq 0$, alors $u_{n+1} \div u_n$ soit une constante).

Propriété : Toute suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$, converge vers 0 .

Exercice 3: u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^{n+5}}{5^n}$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique.
b) Justifier le sens de variation de la suite u.

Exercice 4 : Calculer S = 2 + 4 + 8 + ……..+ 256

e) Si a $\neq$ 1 et b $\neq 0$, pour calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon explicite en fonction de n, on se ramène au cas de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - \alpha$ avec $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ $(\alpha = a\alpha + b)$ une constante réelle telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. On en déduira alors v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 5 : On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$.
Montrer que la suite définie par $v_n = u_n - 3$ est une suite géométrique dont vous exprimerez le premier terme et la raison. En déduire une expression de v_n, puis u_n en fonction de n.

II] Convergence

1) Théorème des gendarmes : (admis) soit $(u_n;v_n;w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un triplet de suites telles que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et vérifient , pour n assez grand , les relations $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Corollaire : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers + ∞, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi . Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers - ∞, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Propriétés : Toute suite arithmétique de raison r > 0 est croissante et diverge vers + ∞.
Toute suite arithmétique de raison r < 0 est décroissante et diverge vers - ∞.

Toute suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$, converge vers 0 .

2) Propriétés (admises) :

a. Si une suite croissante est majorée par M , alors elle est convergente vers L et $L \leq M$.
b. Si une suite décroissante est minorée par m , alors elle est convergente vers L et $L \geq m$.

3) Propriété : (démontré dans le chapitre des limites)

a. Une suite croissante non majorée diverge vers + ∞.
b. Une suite décroissante non minorée diverge vers - ∞.

Exercice 6 : On considère la suite (u) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 10\,000$ et $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 5\,000$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Démontrer par récurrence que (u) est majorée par 25 000.
3) Démontrer que la suite (u) est croissante.
4) Etudier la convergence de la suite (u) et en déduire sa limite.

III] Suites adjacentes

1) Définition : Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si :

a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .
b. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
c. La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) Théorème (A démontrer) ROC : Deux suites adjacentes ont la même limite.

Exercice 7 : Soient les suites u, v , w et t définies par : $u_0 = 2$, $v_0 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5}$, $v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5}$,
$w_n = v_n - u_n$ et $t_n = u_n + v_n$.
a) Montrer que la suite w est géométrique.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
c) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
d) Montrer que la suite t est constante et en déduire la limite commune des suites u et v.