Objectifs *: Sens de variation d'une suite numérique. Approche de la notion de limite d'une suite à partir d'exemples. Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.*

I- Sens de variation d'une suite numérique

1) Définition : (u_n) est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

- Une suite est **croissante** à partir d'un entier n_0 si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite est **décroissante** à partir d'un entier n_0 si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est **constante** à partir d'un entier n_0 si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite **monotone** est soit une suite croissante, soit une suite décroissante, soit une suite constante.

Remarque : il existe des suites qui ne sont pas monotones : exemple : $u_n = (-1)^n$.

2) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n)

Méthodes: - On peut comparer directement u_n et u_{n+1} grâce aux propriétés des inégalités.
- On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite *u* est définie au moyen d'une fonction *f* par $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction *f*. Si *f* est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement croissante . Si *f* est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante .
- Si tous les termes de la suite *u* sont strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exercice 1 : Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

Exercice 2 : Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 3n - 9$

Exercice 3 : Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5}{3^n}$

Cas particulier des suites arithmétiques :
(u_n) est une suite arithmétique de raison r. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Cas particulier des suites géométriques : (ROC)
(u_n) est une suite géométrique de raison **$q > 0$ et de 1^{er} terme $u_0 > 0$**.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.

Exercice 4 : La suite u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{n+5}}{5^n}$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique.
b) Justifier le sens de variation de la suite u.

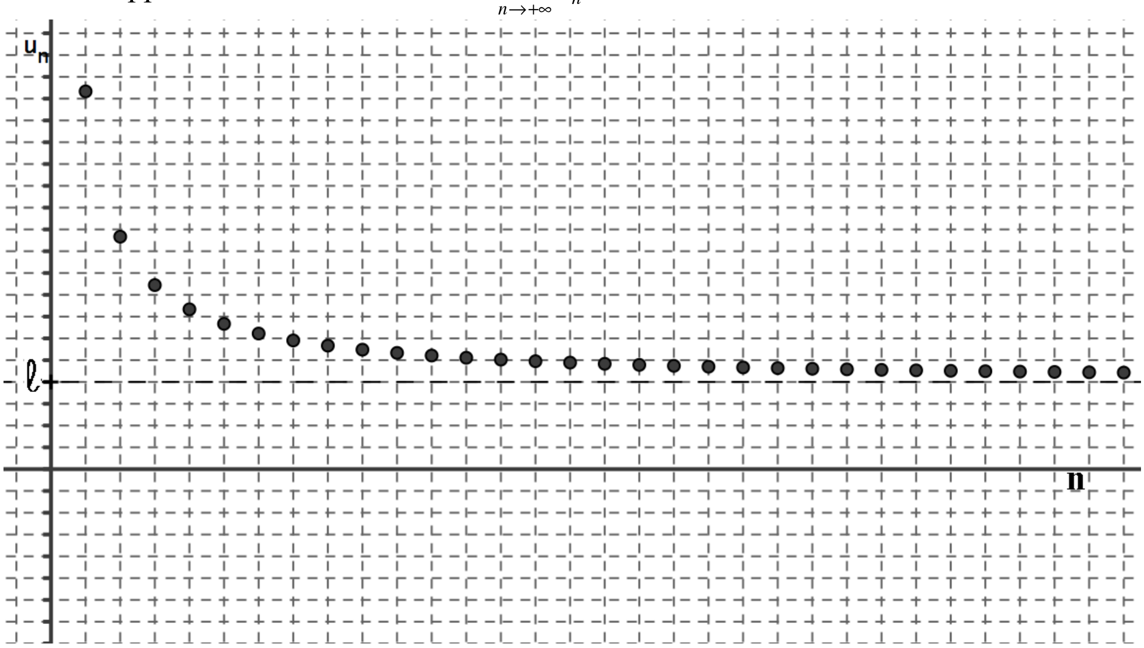
II- Approche de la notion de limite

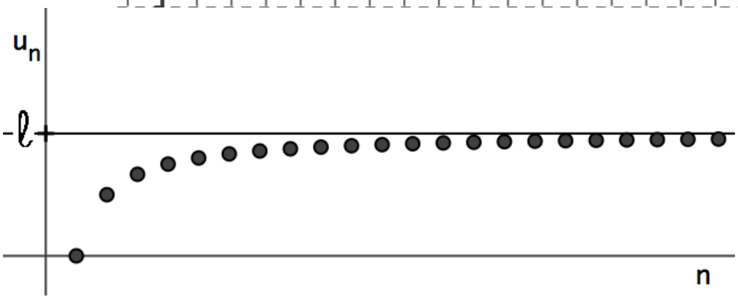
1) Convergence

Définition

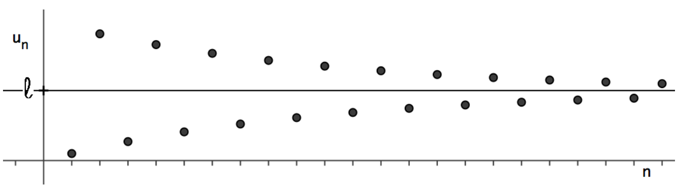
• La suite u converge vers le nombre réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice ou ce qui revient au même contient tous les termes sauf un nombre fini d'entre eux.

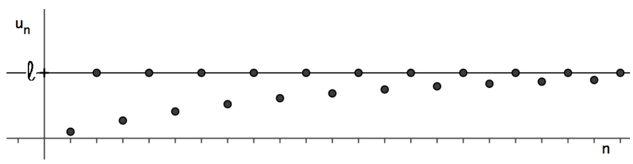
• Le nombre ℓ s'appelle limite de u et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$





Il existe différentes façons de converger vers la même limite.





Exemples de référence

Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Théorème : unicité de la limite
Lorsqu'une suite converge, sa limite est unique.

Exercice 5 : La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$

a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel non nul, $u_n > \frac{1}{2}$.
b) Prouvez qu'à partir d'un certain entier *m*, que vous préciserez, tous les termes de la suites d'indice *n* avec *n* > *m*, sont dans l'intervalle I =]0,49 ; 0,51[.

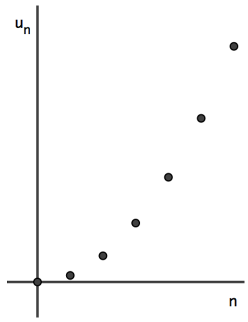
2) Divergence

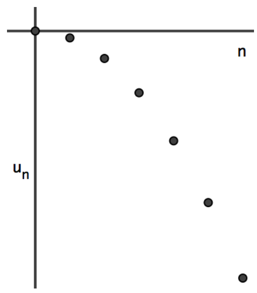
Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente

Les différents cas de divergence
→ **Cas 1** : lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, *u* est divergente.

Dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que tout intervalle [A,+∞[contient tous les termes à partir d'un certain indice.
Dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle]–∞,A] contient tous les termes à partir d'un certain indice.

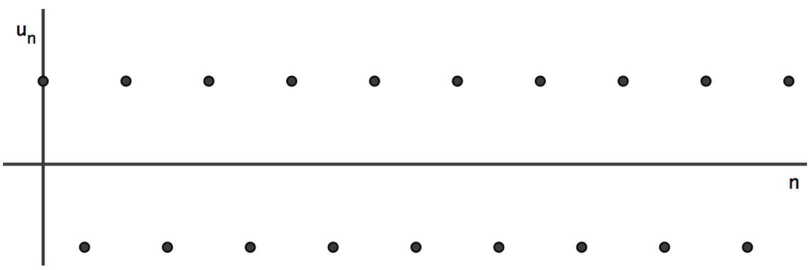
Exemples : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

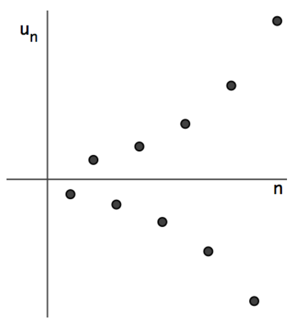




Exercice 6 : La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel par $u_n = \sqrt{2n+1}$
a) Démontrer que pour tout entier *n*, on a $u_n > 0$ et que la suite (u_n) est croissante.
b) Déterminer le plus petit entier naturel *m* tel que $u_m \geq 10^5$. Conclure.

→ **Cas 2** : lorsque la suite n'a pas de limite, elle est divergente.





Exemple : $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite, elle diverge.