LE SECOND DEGRÉ

Objectifs : *Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.*
Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.

Exercice de motivation : Un rectangle a pour périmètre $P = 14$ m et pour aire $S = 12$ m^2.
Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

I - Fonction polynôme du second degré

1) Définition : On appelle fonction polynôme du second degré à coefficients réels toute fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ **où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$** L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée trinôme du second degré.

Exemples : $x^2 - 7x + 12$ $(a = 1 ; b = -7 ; c = 12)$; $5x^2 + 1$ $(a = 5 ; b = 0 ; c = 1)$
$4x^2$ $(a = 4 ; b = 0 ; c = 0)$; $(x + 1)(x + 2)$ peut s'écrire $x^2 + 3x + 2$

Contre-exemples : $2x + 1$ est un binôme du premier degré ;
$6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ est une expression du 3ème degré ; $(x - 1)^2 - x^2$ est du premier degré.

Exercice 1 : Démontrer que si deux fonctions polynômes du second degré P et Q sont égales (sur $\mathbb{R}$), alors leurs coefficients sont égaux.

2) Forme canonique : **(ROC)** On appelle forme canonique d'un trinôme du second degré l'écriture :
$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$. La quantité Δ s'appelle le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Cette forme canonique va servir au moins à quatre choses :
- dire si le trinôme possède ou non des racines, et s'il en a lesquelles
- factoriser le trinôme lorsque ce sera possible
- connaître le signe du trinôme suivant les valeurs de x
- étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et tracer sa représentation graphique avec précision (coordonnées de l'extremum)

Exercice 2 : Déterminer la forme canonique de $x^2 - 7x + 12$

3) Représentation graphique et variations
A partir de la forme canonique d'un trinôme du second degré, on peut tracer sa courbe représentative.
Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, notons C la courbe d'équation $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

> Théorème : La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.
> Elle est tournée vers le haut si $a > 0$, tournée vers le bas si $a < 0$.
> Son axe de symétrie est la droite verticale d'équation : $x = -\dfrac{b}{2a}$.
> Son sommet S a pour coordonnées : $S\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Exercice 3 : Représenter rapidement l'allure des courbes des fonctions f et g telles que :
$f(x) = -3x^2 + 6x + 1$ et $g(x) = 5x^2 - 10x + 3$

II- Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

Définition : On appelle **racine** d'une fonction trinôme du second degré tout nombre réel α tel que $f(\alpha)=0$. Autrement dit, une racine de f est une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre l'équation : $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$ qui s'écrit encore :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (*)$$

Dans cette dernière expression, tout est positif sauf Δ, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant

> Théorème (ROC)
>
> **Si $\Delta < 0$** : l'équation n'a pas de solution réelle.
>
> **Si $\Delta = 0$** : l'équation a une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$. On dit que cette solution est double.
>
> **Si $\Delta > 0$** : l'équation possède alors 2 solutions réelles :
>
> $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarques : Si les coefficients a et c sont de signes opposés, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines ; car en effet, dans ce cas, $\Delta = b^2 - 4ac$ est forcément positif.

Le calcul de Δ est inutile dans le cas de trinôme « incomplets » (exemples : $x^2 - 2x = 0$; $x^2 - 5 = 0$)

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
- $x^2 - 4x + 4 = 0$
- $-6x^2 + x + 1 = 0$
- $5x^2 + 6x + 2 = 0$
- Répondre à l'exercice de motivation
- $2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} + 2 = 0$

Conséquence : Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. **Le trinôme se factorise ainsi** :

- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Exercice 5 : Factoriser les trinômes suivants : $x^2 - 4x + 4$; $-6x^2 + x + 1$; $2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} + 2$

III- Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ et résolutions d'inéquations

> Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.
> Et en particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant. (Celui de a)

En résumé : Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $\Delta < 0$	**Si $\Delta = 0$**	**Si $\Delta > 0$ et $x_1 < x_2$**
$f(x)$ est du signe de a	$f(x)$ est du signe de a et est nul pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$.	$f(x)$ est du signe de a si x est à l'extérieur des racines, sur $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$. $f(x)$ est du signe de - a si x est à l'intérieur des racines, sur $]x_1\,;x_2[$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $x^2 - 4x + 1 \leq 0$; $-x^2 + 3x - 2 < 0$.