BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7,
dont une feuille annexe numérotée page 7 à rendre avec la copie.

Une feuille de papier millimétré est mise à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1.

   a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;+\infty[$.

   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

   $$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

   d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2.

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle$[0\,;+\infty[$. On notera α cette solution.

   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout entier naturel } n \neq 0, u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En **Annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1.

   a. Construire sur l'axe des abscisses de l'**Annexe 1** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n), en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2.

a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question **2.*a***.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question **1.*b*** de la partie B.

e. En utilisant la question **2.*a*** de la partie A, justifier que $\lim u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u – 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Exercice 2 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.
3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :

- on tire une boule de l'urne U. Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau ;
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.

2. On appelle Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire Y prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.
Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

3. On appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.
Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.

4. On appelle *proportion moyenne de boules rouges* le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.
Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A : restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant :

> Soit a un réel.
> Soit (E_0) l'équation différentielle de fonction inconnue y de variable réelle, dérivable de fonction dérivée y' :
> $$y' = ay \quad (E_0)$$
> Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

On considère a et b deux réels, avec a non nul.
Démontrer que les solutions de l'équation différentielle de fonction inconnue y de variable réelle, dérivable de fonction dérivée y' :

$$y' = ay + b \quad (E)$$

sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Partie B

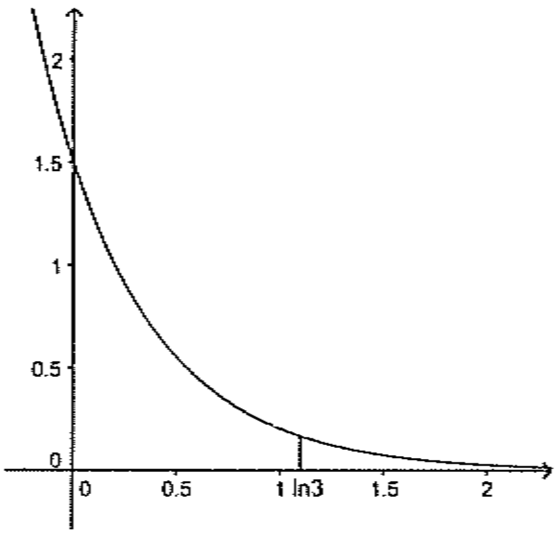
Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse :

1. **Affirmation 1 :** si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels **R** est solution de l'équation $y' + 3y = 6$ alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

2. **Affirmation 2 :** si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels **R** est solution de l'équation $y' = y$ alors pour tous réels α et β, $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$.

3. La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$ *(voir figure ci-contre)*.

   Affirmation 3 : l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln(3)$, est $\frac{2}{3}$.



Exercice 4 *(5 points)*

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}\ ,\vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$, où z est un nombre complexe.

On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O;\ \vec{u}\ ,\vec{v})$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a
$$(z'-1)(z-1) = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $AM\ \times AM' = \frac{1}{2}$;
   - $M' \neq A$;
   - $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.
4. On considère le point P d'affixe $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question **3**, expliquer comment construire le point P', image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   a. Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.
   b. Tout point de $\mathscr{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

Annexe 1
(Exercice 1)
Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie