BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique

Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME

Exercice 1 (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes **C** l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.

2. a) En prenant comme unité graphique 1 cm, représenter dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + 2\mathrm{i},\ z_B = 2 - 2\mathrm{i}, \text{ et } z_C = 4.$$

b) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B.

c) Démontrer que le triangle AOB est rectangle isocèle.

d) Démontrer que le quadrilatère OBCA est un carré.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit E le milieu du segment [OA] et D le point d'affixe $z_D = \mathrm{i}\, z_A$.

Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].

Exercice 2 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les cinq questions sont indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses ou affirmations sont proposées, dont une seule est juste. Le candidat mentionnera le numéro de la question, et la lettre correspondant à la réponse juste. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point, l'absence de réponse ou une mauvaise réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y désigne une fonction de variable réelle x deux fois dérivable.
Une solution de cette équation est la fonction f vérifiant, pour tout réel x :

Réponse A : $f(x) = 4\mathrm{e}^{-4x}$ **Réponse B :** $f(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$

Réponse C : $f(x) = 10\cos(2x) - 10\sin(2x)$ **Réponse D :** $f(x) = 10\cos(4x) - 10\sin(4x)$

Question 2

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x+1}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Une expression de $f'(x)$ est :

Réponse A : $f'(x) = 2\mathrm{e}^3$ **Réponse B :** $f'(x) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x-1}$

Réponse C : $f'(x) = 2\mathrm{e}^{3x+1}$ **Réponse D :** $f'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{3x-1}$

Question 3
Un jeu est basé sur une expérience aléatoire et il permet de gagner ou de perdre de l'argent. La variable aléatoire X qui représente ce gain (positif ou négatif) admet la loi de probabilité suivante.

Valeurs de X	-5	-2	0	1	6
Probabilité	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$

On considère que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable X est strictement positive, équitable si elle est nulle, et défavorable au joueur si elle est strictement négative.

Réponse A : le jeu est défavorable au joueur
Réponse B : le jeu est équitable
Réponse C : le jeu est favorable au joueur
Réponse D : on ne peut pas savoir

Question 4
Soit C la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = x^2 + 1$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe des abscisses. Cela engendre un solide de révolution dont le volume V, exprimé en unité de volume, est :

$$V = \pi \int_0^1 [g(x)]^2 \,\mathrm{d}x.$$

La valeur exacte de V est égale à :

Réponse A : $\frac{4\pi}{3}$ **Réponse B** : $\frac{6\pi}{5}$ **Réponse C** : 4π **Réponse D** : $\frac{28\pi}{15}$

Question 5
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]\,5\ ;\ +\infty\,[$ dont la représentation graphique dans un repère du plan est notée C.
On suppose que $\lim_{x \to 5} f(x) = +\infty$. Ce résultat s'interprète ainsi :

Réponse A : la courbe C admet une asymptote d'équation $x = 5$.
Réponse B : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote d'équation $y = 5$.
Réponse C : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote oblique d'équation $y = 5x$.
Réponse D : la courbe C admet au point d'abscisse 5 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Problème (10 points)

Partie A - Exploitation d'informations graphiques

On considère la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x) = ax + b + e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels que l'on va déterminer dans cette partie.

On donne les renseignements graphiques suivants sur la courbe représentative de la fonction g dans un repère d'axes (Ox) et (Oy) :

- le point A de coordonnées $(0 ; 4)$ appartient à cette courbe représentative ;
- la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. À partir des renseignements précédents, donner la valeur de $g(0)$ ainsi que celle du nombre dérivé $g'(0)$.

2. Déterminer la valeur du nombre b en utilisant la question **1.**

3. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$ en fonction de a. En déduire la valeur du nombre a.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x + 3 + e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

2. a) Pour tout réel x, démontrer l'égalité : $f(x) = e^{-x}(1 + xe^{x} + 3e^{x})$.

   b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Pour tout réel x, démontrer que $f'(x) = 1 - e^{-x}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ sur **R**.

   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur **R**.

4. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ et son asymptote $\mathscr{D}$ dans le même repère. On prendra pour unité 1 cm sur chacun des axes.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$?

Partie C – Calcul d'une aire plane

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur **R**.

2. Hachurer le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathscr{A}$ l'aire de ce repère, exprimée en unité d'aire.

3. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis donner sa valeur arrondie au mm^2.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombres d'éléments de } A}{\text{Nombres d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématiques : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right) 2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i 2 - \left(E(X)\right) 2$

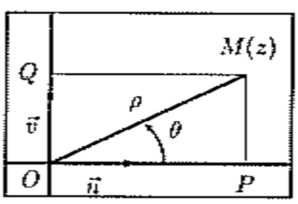
Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *Nombres complexes*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overline{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$
$\overline{OP} = x = \Re(z) = \rho\cos\theta$
$\overline{OQ} = y = \Im(z) = \rho\sin\theta$
$OM = \rho = |z| = \sqrt{x2 + y2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z'} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z| - |z'|\right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

B. Identités remarquables

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

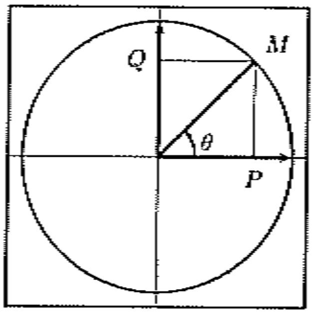
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. *Trigonométrie*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos 2\theta + \sin 2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} 2k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin 2a = 2\cos 2a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. *Équations du second degré*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty\ ;\ +\infty[$ et $y \in]0\ ;\ +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;+\infty[$ et $y \in [0;+\infty[$

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *Limites usuelles des fonctions*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique)

Si $k > 1$, $\lim_{n\to+\infty} k^n = +\infty$; Si $0 < k < 1$, $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$

C. *Dérivées et primitives* *(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)*

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = k\,u'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = nu^{\alpha-1}u'$

D. *Calcul intégral*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

E. *Équations différentielles*

Équations	Solutions sur intervalle $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$