Session 2012

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Série sciences et technologies industrielles

Génie électronique
Génie électrotechnique
Génie optique

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 4

Le formulaire officiel est joint au sujet
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée
(Circulaire n°99-186 du 16/11/1999)

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Une feuille de papier millimétré est fournie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

On a placé dans une boîte quatre résistors : deux verts notés V et V', un marron noté M et un rouge noté R.
On choisit successivement et sans remise deux résistors l'un après l'autre. Un résultat d'un tel tirage peut être par exemple rouge, puis marron : il sera noté (R ; M). Tous les tirages sont équiprobables.
On donnera les résultats des probabilités demandées sous forme de fractions irréductibles.

1. Donner les 12 tirages possibles (on pourra s'aider d'un arbre).

2. On considère les événements suivants :
A : « le premier résistor choisi est vert »
B : « l'un au moins des résistors choisis est vert »

a. Énoncer par une phrase l'événement $\overline{B}$, événement contraire de l'événement B.

b. Calculer la probabilité des événements A et B.

3. Chaque résistor vert a une résistance nominale de 0,5 ohm, le résistor marron a une résistance de 1 ohm et le rouge de 2 ohms. On décide de monter en série les deux résistors obtenus lors d'un tirage.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux résistors, associe la résistance équivalente en ohms du montage en série obtenu (on rappelle qu'elle est égale à la somme des résistances des deux résistors).

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Que désigne l'événement $(X = 1)$? Calculer sa probabilité.

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire$X$.

Exercice 2 (6 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ les équations :

a. $\dfrac{-2}{z-2} = 2$

b. $z^2 - 2z + 2 = 0$

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 centimètres.
Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_B = 1 - \mathrm{i} \quad ; \quad z_C = 1$$

a. Faire une figure en plaçant les points A, B et C.
On complètera la figure au fur et à mesure des questions de l'exercice.

b. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

c. Déterminer la nature du triangle OAB.

d. Tracer alors le cercle circonscrit au triangle OAB, qu'on notera Ω.

3. Soit D le point d'affixe $z_D = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Écrire z_D sous forme algébrique et placer le point D.

b. Montrer que les points A, B, C et D sont alignés.

4. Soit D' le milieu du segment $[OD]$. Montrer que D' appartient au cercle Ω.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

Problème (10 points)

Partie A

On donne, à l'instant $t = 0$, un médicament à un animal.
On note $f(t)$ la concentration, en milligrammes par litre, de ce médicament présent dans le sang à l'instant $t \geq 0$ exprimé en heures. La courbe Γ fournie en annexe représente l'évolution de cette concentration $f(t)$ en fonction de t.
Dans cette partie A, il est demandé de répondre aux questions par simple lecture graphique.

1. Quelle est la valeur de la concentration à l'instant $t = 0$?

2. Combien de temps après la prise du médicament la concentration est-elle maximale ? Quelle est alors la concentration maximale de ce médicament ?

3. Au bout de combien de temps après la prise du médicament la concentration redescend-elle au quart de sa valeur maximale ?

4. Que peut-on conjecturer sur la concentration quand t tend vers l'infini ?

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = 8(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})$.
On admet que la courbe Γ fournie en annexe représente la fonction f.

1. Calculer $f(0)$.

2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de la fonction f ?

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 8\mathrm{e}^{-t}(2\mathrm{e}^{-t} - 1)$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{-t} - 1 < 0$.

c. En déduire le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   b. Ce résultat est-il cohérent avec les réponses données à la question 2 de la partie A ? Pourquoi ?

5. **a.** Quelle équation (E) convient-il de poser pour vérifier la réponse à la question 3 de la partie A ?

   b. En posant $X = \mathrm{e}^{-t}$, montrer que résoudre cette équation (E) revient à résoudre l'équation (E') : $X^2 - X + \dfrac{1}{16} = 0$.

   c. Résoudre cette équation (E') dans l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$. En déduire les solutions de l'équation (E) dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

   d. Ce résultat est-il cohérent avec la réponse donnée à la question 3 de la partie A ? Pourquoi ?

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(t) = 2(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} - 8(1+t)\mathrm{e}^{-t}$.

   a. Calculer $F(0)$.

   b. Montrer que, pour tout t dans l'intervalle $[0;+\infty[$, $F'(t) = tf(t)$.

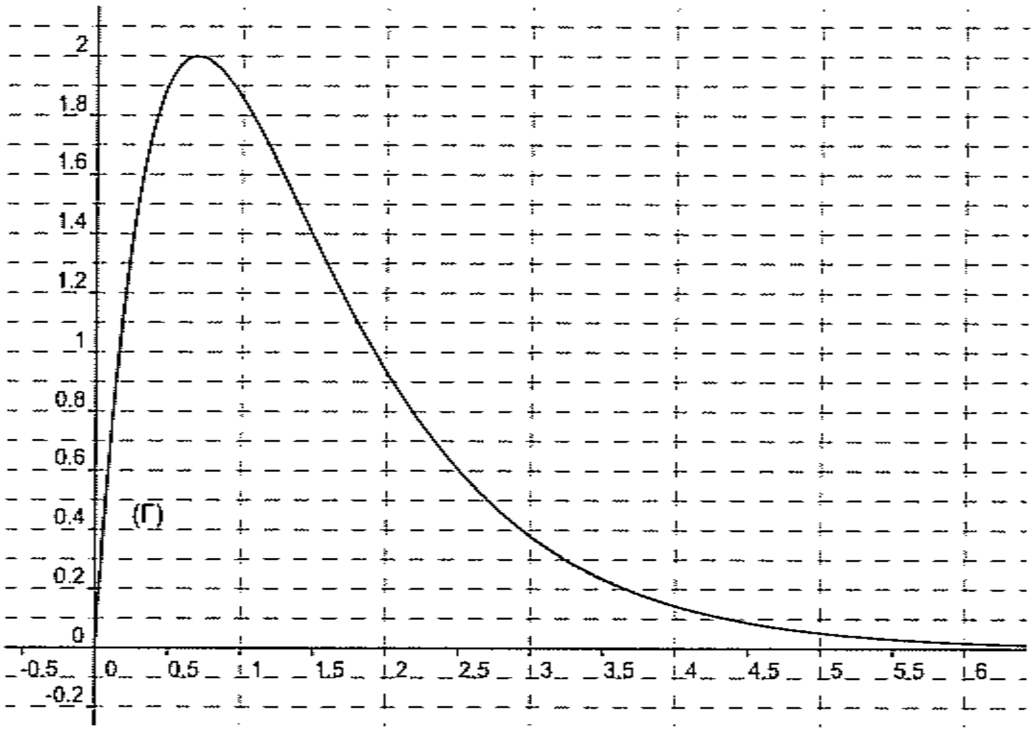
2. On note $Q(t)$ la quantité d'anticorps présente dans l'organisme de l'animal à l'instant t. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, cette quantité est nulle. Dans les conditions de l'expérience, on admettra que la dérivée de cette quantité Q est reliée à la concentration de la substance par la relation : $Q'(t) = tf(t)$ (lorsque $t \geq 0$).

   a. Justifier que, pour tout t dans l'intervalle $[0;+\infty[$, $Q(t) = F(t) + k$ où k désigne une constante réelle.

   b. Déterminer la valeur de k.

   c. En déduire l'expression de $Q(t)$ en fonction de t.

Annexe (problème) : à rendre avec la copie



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombres d'éléments de } A}{\text{Nombres d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématiques : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i 2 - (E(X))2$

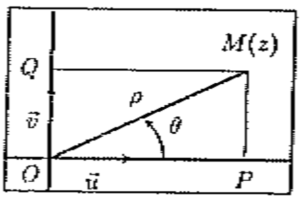
Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *Nombres complexes*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$
$\overline{OP} = x = \Re(z) = \rho\cos\theta$
$\overline{OQ} = y = \Im(z) = \rho\sin\theta$
$OM = \rho = |z| = \sqrt{x2 + y2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$

$z\overline{z'} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

B. Identités remarquables

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

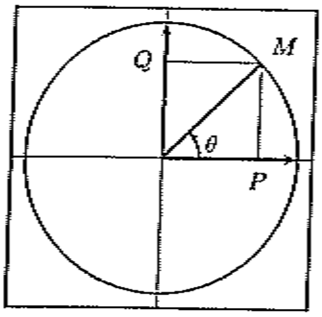
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. *Trigonométrie*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos 2\theta + \sin 2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} 2k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin 2a = 2\cos 2a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. *Équations du second degré*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty\,;\ +\infty[$ et $y \in]0\,;\ +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; +\infty[$ et $y \in [0; +\infty[$

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *Limites usuelles des fonctions*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$ et si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$; Si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

C. *Dérivées et primitives* *(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)*

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = nu^{\alpha-1}u'$

D. *Calcul intégral*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$

$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Positivité

Si $a\le b$ et $f\ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a\le b$ et $f\le g$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Si $a\le b$ et $m\le f\le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

E. *Équations différentielles*

Équations	Solutions sur intervalle $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$