LE PRINCIPE DU RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1. Exemple introductif (Les élèves qui connaissent déjà bien le principe peuvent sauter ce paragraphe)

Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme dépend du précédent). On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux. Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour se faire une "idée".

Ici, nous avons :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

Stop, nous remarquons que la suite (u_n) <u>semble</u> obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations. **Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus** ?

Notons $\wp$ la propriété, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : u_n = 2^n - 1$$

Supposons un instant, que *pour un certain entier n*, on ait effectivement la propriété $\wp(n)$: $u_n = 2^n - 1$.

Alors, on aurait : $$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant.

On dit que la propriété $\wp$ est **héréditaire**.

Faisons un bilan. On a vérifié que la propriété $\wp$ était vraie au rang $n = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5 (On dit que la propriété $\wp$ est **initialisée**). Mais comme elle est **héréditaire**, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc... Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang.

Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence** :

Soit $\wp$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou un intervalle I de $\mathbb{N}$)

Si :

- La propriété est INITIALISÉE à un certain rang n_0 (C'est-à-dire : $\wp(n_0)$ est vraie)
- La propriété est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0 (C'est-à-dire : pour tout $n \geqslant n_0$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$)

Alors :

La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

2. Premiers exemples rédigés

1) On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \qquad \text{(Somme des } n \text{ premiers nombres impairs)}$$

Démontrer que : $$u_n = n^2$$

Remarque : ce résultat se démontre également à l'aide de la formule $S = \dfrac{N(P+D)}{2}$

2) Démontrer que : $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3) Démontrer que : $$\forall x \in]-1, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ (1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$

4) Démontrer que : $$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

5) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

La notation $f^{(n)}$ désigne ici la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f.

6) Démontrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $$|\sin(nu)| \leqslant n\,|\sin u|$$

7) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = x^n$$

Démontrer que f_n est dérivable et que pour tout réel x :

$$f'_n(x) = n\,x^{n-1}$$

8) Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$u_n = 2^n$$

9) Démontrer que : $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

Solutions :

1) On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \; n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1 = \sum_{k=1}^{1} (2k-1)$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

  On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2n + 1$$

  Et d'après $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = n^2 + 2n + 1$$

  D'où : $$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

  On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \geqslant 1$:

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

2) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

  On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

  Et d'après $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

  En factorisant par $(n+1)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\left[(n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^3 = \dfrac{1^2 \times 2^2}{4}$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

Et d'après $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

En factorisant par $(n+1)^2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Et comme, on sait que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On a finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Autre méthode, sans récurrence : on considère un carré C de côté $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (voir figure)

On définit A_1 par l'aire d'un carré de côté 1

Puis, pour tout $k \geqslant 2$, A_k par l'aire de "l'équerre de largeur k"

(Différence entre les aires des carrés de côté $\dfrac{k(k+1)}{2}$ et celui de côté $\dfrac{(k-1)k}{2}$)

On calcule l'aire de C de deux façons. D'une part, c'est $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

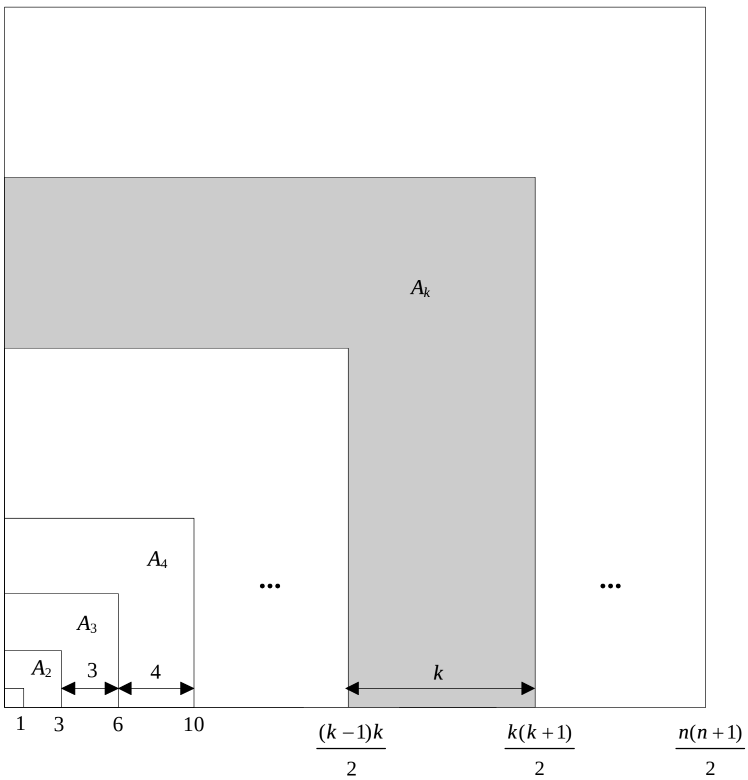
D'autre par, c'est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$ (Les équerres partitionnent C)

Or, pour $k \geqslant 2$:

$$A_k = \left(\sum_{\ell=1}^{k} \ell\right)^2 - \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 = k \times k^2 = k^3$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$



3) Soit $x \in]-1, +\infty[$. On considère la propriété la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Il s'agit de l'inégalité de Bernoulli.

- On a $\wp(0)$ puisque $(1 + x)^0 \geqslant 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  Or, $1 + x > 0$, donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x)$$

  Or : $\qquad (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + n\,x^2 = 1 + (n + 1)x + n\,x^2$

Comme $n\,x^2 \geqslant 0$, on a : $\quad (1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$

D'où : $\quad (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$) donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Remarque : lorsque $x \in \mathbb{R}_+$, cette inégalité se démontre également avec la formule du binôme de Newton(1) :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Or, la somme ne contient que des termes positifs (puisque $x > 0$). Donc :

$$(1+x)^n \geqslant \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k$$

Et comme $\binom{n}{0} x^0 = 1$ et $\binom{n}{1} x^1 = nx$, on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

4) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- On a $\wp(1)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(n)$: $\quad \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Alors : $\quad \displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Et d'après $\wp(n)$: $\quad \displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

En réduisant au même dénominateur :

$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Bilan : on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(1) Cette remarque peut être sautée en première lecture, la formule du binôme de Newton sera démontrée ulterieurement.

Autre méthode : en remarquant que $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$, on obtient, par télescopage :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

5) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} \right) \text{ et } \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} \right)$$

- On a clairement $\wp(0)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n) : \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} \right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} \right)$

  On a alors : $\cos^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2} \right)$ et $\sin^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} \right)$

  Or, $-\sin(A) = \cos\left(A + \frac{\pi}{2} \right)$ et $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{\pi}{2} \right)$

  Donc : $\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2} \right)$ et $\sin^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2} \right)$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} \right) \text{ et } \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} \right)$$

6) Fixons $u \in \mathbb{R}$. On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : |\sin(nu)| \leqslant n|\sin u|$$

- On a clairement $\wp(0)$ et $\wp(1)$.
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Comme

$$\sin[(n+1)u] = \sin(nu)\cos u + \sin(u)\cos(nu)$$

$$|\sin[(n+1)u]| \leqslant |\sin(nu)| + |\sin(u)|$$

  Et d'après $\wp(n)$: $|\sin[(n+1)u]| \leqslant n\,|\sin u| + |\sin(u)|$

  D'où : $|\sin[(n+1)u]| \leqslant (n+1)\,|\sin(u)|$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan :on a $\wp(0)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sin(nu)| \leqslant n|\sin u|$$

7) On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : f_n \text{ est dérivable et pour tout réel } x : f'_n(x) = n\,x^{n-1}$$

La dérivée d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la fonction constante $x \mapsto a$ égale au coefficient directeur.

- On a, pour tout réel x, $f_1(x) = x$ et $f'_1(x) = 1 = 1 \times x^0$ d'où $\wp(1)$.
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(n)$.

  Écrivons $f_{n+1}(x) = x \times x^n = x f_n(x)$

  On a sait que l'application $x \mapsto x$ est dérivable (de dérivée la constante égale à 1). De plus, par hypothèse, f_n est dérivable. La formule de dérivation d'un produit nous donne alors :

$$f'_{n+1}(x) = 1 \times f_n(x) + x\,f'_n(x) = x^n + x\,n\,x^{n-1} = (n+1)\,x^n$$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan :on a $\wp(0)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \text{ est dérivable et pour tout réel } x : f'_n(x) = n\,x^{n-1}$$

8) On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

Lorsqu'on choisit ce type de propriété, on dit parfois que l'on fait une récurrence "forte".

$$\wp(n) : \text{pour tout entier } m \leqslant n,\ u_m = 2^m$$

- Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on a $\wp(1)$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: pour tout entier $m \leqslant n$, $u_m = 2^m$

  Alors : $u_{n+1} = 5 \times 2^n - 6 \times 2^{n-1} = 10 \times 2^{n-1} - 6 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

  D'où $\wp(n+1)$.

Bilan :on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où :

$$\text{pour tout entier } m,\ u_m = 2^m$$

9) On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

- On a $\wp(1)$ (c'est l'égalité triviale $a_1^2 = a_1^2$) et $\wp(2)$ (c'est la célèbre identité : $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$)
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 2$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\wp(n)$: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$

  On a : $\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}^2$

D'après $\wp(n)$: $$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}^2$$

$[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre m et n.

Tenant compte des conditions : $i \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$ et $j \in [\![i+1\ ;\ n]\!]$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j + 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2a_n a_{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j + a_{n+1}a_i\right) + 2a_n a_{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n+1} a_i a_j + 2a_n a_{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1} a_i a_j$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_i a_j$$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que : $\forall n \geqslant 2,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1), \wp(2)$ et $(\forall n \geqslant 2,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$ donc on a : $\wp(n),\ \forall n \geqslant 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$

Exemple : $(n = 3)$ $\quad (a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$

3. Deux modèles de rédaction

Dans les deux modèles ci-dessous, vous pouvez recopier "texto" ce qui est écrit en caractère noir (ou normal) et adapter ce qui est écrit en caractère rouge (ou italique).

Un premier modèle, formel et mathématiquement correct :

> Souvent, *Ensemble* est $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$

> Souvent, *rang* est 0 ou 1.

Soit $\wp$ la propriété définie pour $n \in$ *Ensemble* par :

$$\wp(n) : \textit{Ennoncez\_ici\_la\_propriété\_à\_démontrer}$$

- Comme *calculs élémentaires*, on a $\wp(\textit{rang})$.
- Montrons que pour tout $n \geqslant \textit{rang}$ on a : $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant \textit{rang}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

  Etablissez_ici_℘(n + 1)

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

On a prouvé :

$$\wp(\textit{rang}) \text{ et pour tout } n \geqslant \textit{rang},\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \geqslant \textit{rang},\ \wp(n)$$

C'est-à-dire : pour tout $n \geqslant$ *rang*, *Ennoncez_ici_la_propriété_démontrée*

Un second modèle plus littéraire :

Soit $\wp$ la propriété définie pour $n \in$ *Ensemble* par :

$$\wp(n) : \textit{Ennoncez\_ici\_la\_propriété\_à\_démontrer}$$

- Montrons que la propriété $\wp$ est initialisée au rang *rang*

  Comme *calculs élémentaires*, on a $\wp(\textit{rang})$.
- Montrons que la propriété $\wp$ est héréditaire à partir du rang *rang*

  Soit $n \geqslant \textit{rang}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

  Etablissez_ici_℘(n + 1)

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

On a prouvé que la propriété $\wp$ est initialisée au rang *rang* et héréditaire à partir du rang *rang*.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \geqslant \textit{rang},\ \wp(n)$$

C'est-à-dire : pour tout $n \geqslant$ *rang*, *Ennoncez_ici_la_propriété_démontrée*

4. Démonstration mathématique du principe de raisonnement par récurrence (Hors programme)

Énoncé :

> Soit I un intervalle de $\mathbb{N}$ et $\wp$ une propriété définie sur I.
>
> Si :
>
> - $\exists n_0 \in I : \wp(n_0)$ (initialisation)
> - $\forall n \in I \cap [\![n_0, +\infty[\![, \ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$ (hérédité)
>
> Alors :
>
> $\forall n \in I \cap [\![n_0, +\infty[\![, \wp(n)$

Un intervalle de $\mathbb{N}$ est un ensemble du type $[\![a, b]\!]$ ou $[\![a,+\infty[\![$ où a et $b \in \mathbb{N}$.

Le symbole $\exists$ signifie "il existe" et le symbole $\forall$ signifie "quelque soit".

Démonstration

Considérons l'ensemble : $E = \{n \in I \cap [\![n_0, +\infty[\![\text{ tels que non } \wp(n)\} \subset \mathbb{N}$

E est l'ensemble des entiers pour lesquels la propriété n'est pas vraie.

Raisonnons par l'absurde : supposons E non vide.

Comme E est non vide et minoré (par n_0), il admet un plus petit élément m avec $m \geqslant n_0$.

Ce plus petit élément m est élément de E. On a donc non $\wp(m)$.

- Si $m = n_0$, alors non $\wp(n_0)$, ce qui contredit l'hypothèse d'initialisation.
- Si $m > n_0$, alors on a : $\wp(m-1)$ et non $\wp(m)$ ce qui contredit l'hypothèse d'hérédité.

Donc E est vide, autrement dit : pour tout $n \geqslant n_0$, $\wp(n)$

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

La négation de $A \Rightarrow B$ est : A et non B