PRODUIT SCALAIRE – $2^{ème}$ partie

Objectifs *: Equation cartésienne d'une droite / vecteur normal.*
Equation cartésienne d'un cercle
Applications du produit scalaire : Calculs d'angles et de longueurs ; Formules d'addition et de duplication des sinus et cosinus. Démontrer cos (a – b)

I- Vecteur normal et équation de droite

Définition : Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un droite (d), signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (d).

Conséquence : la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\,.\vec{n} = 0$

Propriété : Une droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur nul $\vec{n}$ $(a\,;\,b)$ pour vecteur normal. La réciproque est vérifiée.

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,\right)$, la droite (d) a pour équation $3x - y + 5 = 0$.

a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$, et d'un vecteur normal $\vec{n}$ de la droite (d).
b) Déterminer l'équation de la droite (d') passant par A(1 ; 2) et perpendiculaire à (d).

Exercice 2 : On donne les points A(-1 ; 2) ; B(2 ; 5) et C(3 ; 2). Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

	Équation cartésienne : Cas général.	**Équation réduite : Cas des droites non parallèles à l'axe des ordonnées.**
Équation :	$ax + by + c = 0$	$y = mx + p$
Vecteur directeur : **Vecteur normal :**	$\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}$
Soit *D* d'équation : **et *D'* d'équation :** **Condition de parallélisme :** **Condition d'orthogonalité :**	$ax + by + c = 0$ $a'x + b'y + c' = 0$ $ab' - ba' = 0$ $aa' + bb' = 0$	$y = mx + p$ $y = m'x + p'$ $m = m'$ $mm' = -1$

II- Equation de cercle

Définition : l'équation d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A(x_A ; y_A) et de rayon R est : $\boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2}$

Propriété : Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que : $\boxed{\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0}$

Exercice 3 : Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\ \right)$, on considère les points A(2 ; 1) et B(-4 ; 3).

a) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et passant par B.
b) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$' de diamètre [AB].

Exercice 4 : Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\ \right)$, on donne les équations :

a) $x^2+y^2-2x+y-5=0$ b) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$ c) $2x^2+2y^2-4x-6y+7=0$

Pour chacune de ces équations, dire si c'est une équation d'un cercle. Si oui, précisez le rayon et les coordonnées de son centre.

III- Calculs d'angles et de longueurs

Théorème de Al-Kashi : (ROC)

Dans un triangle ABC quelconque, on pose AB = c, AC = b et BC = a.

On a : $$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{A}\\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\times\cos\widehat{B}\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\times\cos\widehat{C}\end{aligned}}$$

Exercice 5 : ABC est un triangle tel que AB = 3, BC = 8 et $\widehat{ABC}=60°$

a) Calculer AC.
b) Calculez, à un degré près, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

IV- Trigonométrie

1) Formules d'addition

Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

2) Formules de duplication

Notation : $\cos^2 a$ signifie $(\cos a)^2$ et $\sin^2 a$ signifie $(\sin a)^2$

Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a \qquad \sin 2a=2\sin a\cos a$$
$$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$$
$$\cos(2a)=1-2\sin^2 a$$

On en déduit que : $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Exercice 6 : a est un nombre de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\cos a=\dfrac{3}{5}$; b est un nombre de $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ et $\sin b=\dfrac{1}{3}$.

a) Calculer sin a et cos b.
b) En déduire cos (a+b) et sin (a-b).

Exercice 7 : Montrer que $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$