PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

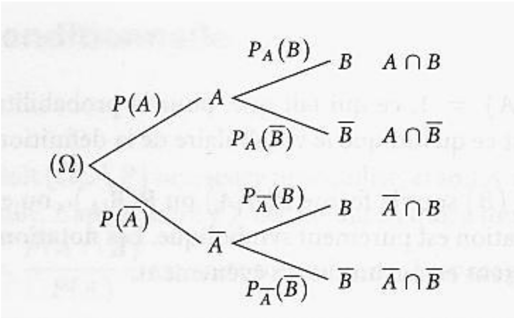
I. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1. Utilisation d'arbres pondérés dans le calcul des probabilités

Exercice 1 :
On dispose d'une urne dans laquelle figurent 3 jetons blancs et 2 jetons noirs.
1) On tire un jeton, on note sa couleur et on le remet dans l'urne, puis, on tire un deuxième jeton.
Quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 jetons de même couleur ?
2) Même question mais on ne remet pas le premier jeton dans l'urne.

Règles de construction et d'utilisation d'arbres pondérés dans le calcul de probabilités :

- Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
- La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.
- La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de la branche A-------B est la probabilité de B sachant que l'événement A est réalisé. On note cette probabilité $P_A(B)$et on l'appelle probabilité de B sachant A.



2. Définition :

p désigne une probabilité sur un univers fini Ω. A et B étant deux événements de Ω, A étant de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement B sachant que A est réalisé le réel noté $\boxed{P_A(B) = P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{p(A)}}$.

Remarque : Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

3. Formule des probabilités totales

Partition de l'univers

Définition : Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier supérieur ou égal à 2.
Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $A_i \neq 0$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ;2 ;\ldots n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une **partition** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors : $\mathbf{p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n)}$

Ou $\mathbf{p(B)} = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

Démonstration : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$, Les événements $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, …, $(B \cap A_n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc la probabilité de leur réunion est la somme de chacun d'entre eux , on en déduit :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n).$$

et en utilisant que, pour tout i de {1 ; 2 ; … ; n}, $p(B \cap A_i)=p_{A_i}(B) \times p(A_i)$, on obtient :

$p(B)= p_{A_1}(B)\times p(A_1)+p_{A_2}(B)\times p(A_2)+\dots\dots+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$

Exercice 2 :

Un stock de paquets de biscuits a été acheté par le gérant d'un supermarché.

2% des paquets ne sont pas intacts.

60% des paquets présentant un défaut ont au moins un biscuit cassé

95% des paquets dont l'emballage est intact ne contiennent aucun biscuit cassé.

Un client achète un paquet de biscuit. Calculer la probabilité des événements suivants :

I : " l'emballage est intact "

A : " l'emballage n'est pas intact mais aucun biscuit n'est cassé "

B : " l'emballage est intact et aucun biscuit n'est cassé "

D : " aucun biscuit n'est cassé "

Exercice 3 : On donne le tableau suivant :

	internes	externes	total
seconde	45		65
première	10	70	
total			

On choisit une personne au hasard. Soit B l'événement : "la personne choisie est interne" et Y l'événement : "la personne choisie est en seconde ".

Déterminer : P(Y), $P(B\cap Y)$ et $P_Y(B)$.

Déterminer : $P(\overline{Y})$, $P(B\cap \overline{Y})$ et $P_B(\overline{Y})$

Exercice 4 : Avec un dé cubique équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir le 6 sachant que le résultat est pair ?

II. INDÉPENDANCE

1. Événements indépendants

Définition : A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

- A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
- A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(B)$.

Théorème : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :$p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Démonstration :- Par définition, les deux premières sont équivalentes

- si $p(A/B) = p(A)$ comme $p(A \cap B) = p(A/B)p(B)$ alors $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$
- si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, comme $p(B) \neq 0$, $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = p(A)$ c'est-à-dire $p_B(A) = p(A)$

Remarque **:** Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B)= p(A)p(B)$
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B= \varnothing$.

La notion d'indépendance dépend de la probabilité sur l'univers, celle d'incompatibilité est purement ensembliste.

Exercice 5 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32. Soit A l'événement : " on obtient un roi " , B l'événement : " on obtient un cœur " ,
C l'événement : " on obtient un roi rouge ".Les événements A et B sont-ils indépendants ? B et C sont-ils indépendants ?

2. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition : X et Y sont deux variables définies sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire ; X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et Y prend les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_q$.
Définir la loi du couple (X, Y) c'est donner la probabilité $p_{i,j}$ de chaque événement $[(X = x_i)$ et $(Y = y_j)]$.

Définition :Dire que deux variables X et Y sont **indépendantes** signifie que, **quels que soient i et j**, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Remarque : Les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants si :

$$p[(X = x_i) \text{ et } (Y = y_j)] = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$$

III. MODÉLISATION D'EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES

1. Expériences indépendantes : exemple

a) Expériences aléatoires indépendantes

On considère les trois expériences aléatoires suivantes :

- A : on lance une pièce de monnaie équilibrée, les issues de l'expérience sont notées P et F.
- B : on tire au hasard un jeton dans une urne qui contient trois jetons portant les lettres a, b et c.
- C : on tire au hasard une boule dans une urne qui contient une boule rouge et une boule verte : on note R et V les deux issues.

Lorsqu'on effectue successivement les trois expériences A, B, C l'issue de l'une quelconque des trois expériences ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

b) Probabilité d'une liste de résultats

Les issues de la nouvelle expérience qui consiste à effectuer successivement A, B , C sont des listes d'issues telles que (P ; c ; V)

Dresser un arbre donnant toutes les listes de résultats possibles.

On modélise cette expérience aléatoire en définissant la probabilité d'une liste d'issues comme le produit des probabilités de chaque issue.

Si, pour chaque expérience A, B et C, on retient le modèle de la loi équirépartie, quelle est la probabilité d'une liste quelconque d'issues ?

2. Répétition d'expériences identiques indépendantes : exemple

a) Définition de l'expérience

On tire au hasard une boule dans une urne contenant 2 boules Noires, 4 boules Rouges et 3 boules Jaunes. Les issues de cette expérience sont notées N, R et J.

Définir la loi de probabilité.

b) Répétition de l'expérience

On répète une fois l'expérience précédente. La première boule tirée est remise dans l'urne avant le deuxième tirage ainsi les deux expériences sont identiques et indépendantes.

c) Calcul de probabilités :

Dresser un arbre donnant tous les résultats possibles de ces deux tirages.

On considère l'événement S : « obtenir une boule rouge exactement ». Calculer p(S).

d) Propriété

Lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun de ces résultats.