2^{nd}

Probabilités

Objectifs : *Probabilité d'un événement dans des situations d'équiprobabilité.*
Utiliser des modèles définis à partir des fréquences observées.
Réunion et intersection de 2 événements : $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

1) Vocabulaire et définition

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé … sont des **expériences aléatoires**, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard.

A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**. Ses éléments sont appelés **éventualités**.

- Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés **événements.**
- Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
- Etant donné un univers Ω, l'événement Ω est **l'événement certain.**
- L'ensemble vide est **l'événement impossible.**
- L'événement formé des éventualités communes à A et B est noté $A \cap B$.
- L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B ou dans les deux est noté $A \cup B$.
- Etant donné un univers Ω et un événement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$.
- A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque : Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un **modèle** de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé **probabilité**.

Loi des grands nombres

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des résultats $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1.

Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{a_i\}$.

Exercice 1 : Le lancer d'un dé cubique non truqué
Soit A l'événement : « obtenir un chiffre pair ».
Soit B l'événement : « obtenir un multiple de 3 ».
Décrire les événements A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$; puis en donner les probabilités.

Exercice 2 : Jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement : « Tirer un pique ».
Soit B l'événement : « Tirer une figure ».
Décrire les événements A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$; puis en donner les probabilités.

2) Probabilités sur un ensemble fini

a) Définition

Soit $\mathbf{\Omega} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini.

- on définit une **loi de probabilité** sur **Ω** si on choisit des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que, pour tout i, $\mathbf{0 \leq p_i \leq 1}$ et $\mathbf{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1}$; p_i est la probabilité élémentaire de l'événement $\{a_i\}$ et on note $p_i = p(\{a_i\})$ ou parfois plus simplement $p(a_i)$.

- pour tout événement E inclus dans **Ω**, on définit p(E) comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui définissent E.

b) Propriétés des probabilités

Parties de Ω	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leq p(A) \leq 1$
$\varnothing$ Ω	Evénement impossible Evénement certain	$p(\varnothing) = 0$ $p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ est l'événement contraire de A	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	**$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$**

Exercice 3 **:** Les astragales ou osselets, sont de petits os à quatre faces. On les numérote a, b, c, d. On lance un astragale et on note sur quelle face il retombe. Voici la loi de probabilité de cette expérience.

Face	a	b	c	d
Probabilité	P_1	P_2	P_3	P_4

Une étude statistique sur de très nombreux lancers a fait apparaître que : $P_1 = P_2$; $P_3 = P_4$; $P_1 = 4P_3$.
Calculer la probabilité de chacune des faces.

Exercice 4 : Quel est le contraire de « jamais », de « noir ».

c) Equiprobabilité

Définition : On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Calculs dans le cas d'équiprobabilité : Dans une situation d'équiprobabilité, si Ω a n éléments et si E est un événement composé de m événements élémentaires (donc $m \leq n$) : $p(E) = \dfrac{\text{card } E}{\text{card } \Omega}$ où card E et card Ω désignent respectivement le nombre d'éléments de E et de Ω. On le mémorise souvent en disant que c'est **le nombre de cas favorables** divisé par **le nombre de cas possibles**.

Remarque : Les expressions suivantes « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables » … indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité .

Exercice 5 : On place dans un sac cinq jetons marqués T, R, U, C, S. On tire au hasard l'un après l'autre et sans les remettre dans le sac trois jetons. On lit les lettres obtenues.
1. Déterminer à l'aide d'un arbre le nombre des issues de l'expérience.
2. Calculer la probabilité des événements M, N et K.

M : « le 1er jeton tiré porte la lettre U ».
N : « il n'a été tiré que des consonnes »
K : « Les jetons T et S n'ont pas été tirés ».

Exercice 6 : L'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie deux fois de suite. A chaque lancer, on note P si on obtient « PILE » et F si l'on obtient « FACE ». On note A_0, A_1 et A_2 les événements respectifs : « obtenir O fois pile » , « obtenir exactement 1 fois pile » et « obtenir 2 fois pile ».

1. Donner l'ensemble Ω de toutes les issues possibles.
2. Quelles sont les issues qui réalisent l'événement A_1 ? En déduire $P(A_1)$.
3. Quel est l'événement contraire de A_1 ? En déduire $P(\overline{A}_1)$.
4. Ecrire de même les issues qui réalisent A_0 puis A_2. En déduire leurs probabilités et celles de leurs contraires.
5. Soient K = « obtenir au moins une fois PILE » et G = « obtenir au plus une fois PILE ». Calculer les probabilités des événements K et G