OLYMPIADES de mathématiques

26 septembre 2012

Toutes séries

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

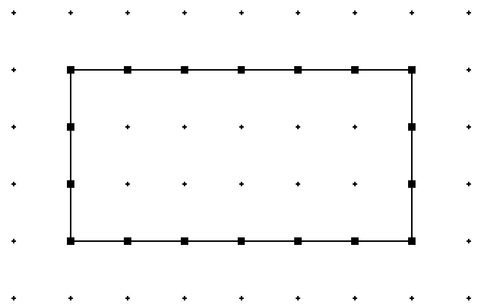
Les annexes en page 8 sont à rendre avec la copie.

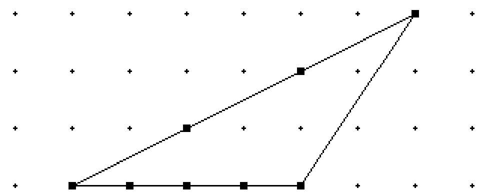
EXERCICE 1 : LE THEOREME DE PICK

En 1899, Georg Alexander Pick énonce la formule suivante :

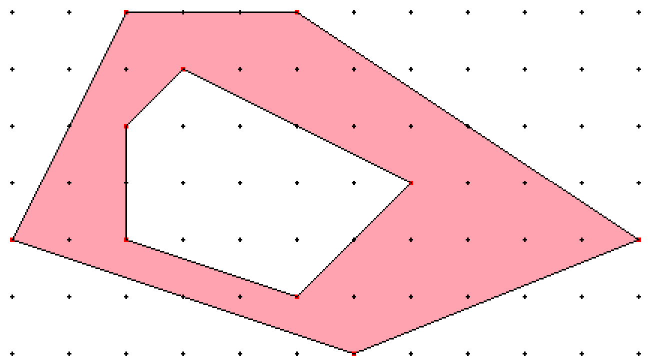
> Pour tout polygone P sans « trous » dont les sommets sont sur les nœuds d'une grille on a $A_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1$, où A_P désigne l'aire du polygone (l'unité d'aire étant l'aire d'un carreau de la grille), i_P étant le nombre de points de la grille intérieurs au polygone et b_P le nombre de points de la grille qui sont sur le bord du polygone.

1. Vérifier la formule pour les deux polygones représentés ci-dessous.





2. En admettant le théorème de Pick, calculer l'aire de la partie grisée ci-dessous.

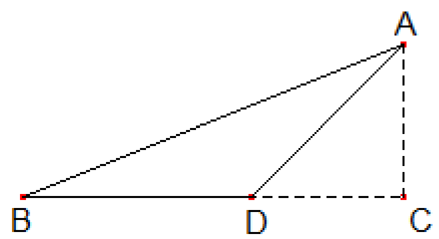


3. Démontrer le théorème de Pick lorsque le polygone est un rectangle quelconque ayant ses quatre sommets sur les points de la grille et dont l'un des côtés est horizontal.

4. Soit T un triangle rectangle dont les trois sommets sont des points de la grille et dont l'un des côtés de l'angle droit est horizontal. On pourra appeler *h* le nombre de points de l'hypoténuse qui sont sur la grille et utiliser le résultat précédent. Démontrer le théorème de Pick dans ce cas.

5. Démontrer le théorème pour un triangle ABD dont les trois sommets sont des points de la grille, dont l'un des côtés est horizontal et ayant la forme ci-contre.

   On pourra désigner par *c* le nombre de points de la grille du segment [AD] et utiliser deux fois le résultat précédent.

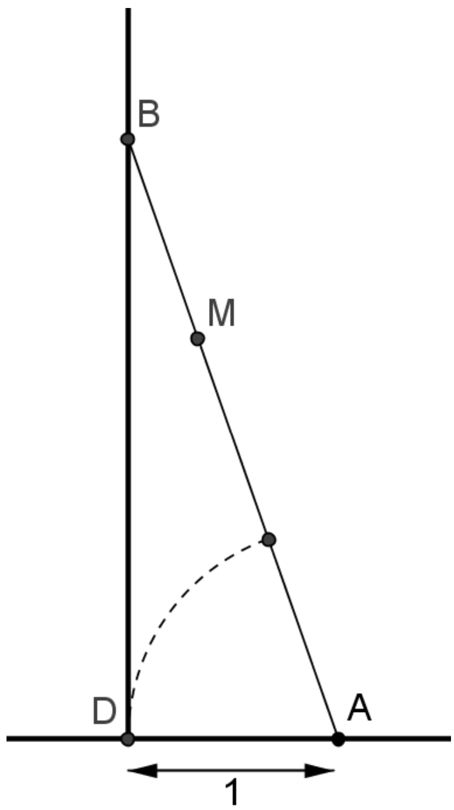


6. Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}; \vec{j}$), on considère les points A(2 ;0), B(-2 ;0) et C(2012 ;4). Quel est le nombre de points intérieurs au triangle ? Donner les coordonnées de ces points.

EXERCICE 2 : L'ECHELLE

Une échelle de 3 mètres de long est appuyée sur un mur. Elle est placée à 1 mètre du mur, c'est-à-dire que la distance DA vaut 1 mètre. Le point M est un point fixe de l'échelle qui est situé à 2 mètres du point A.

L'échelle se met à déraper et à glisser le long du mur, quelle est la trajectoire suivie par le point M ?



EXERCICE 3 : TOURNOI DE HIP-HOP A NOUMEA

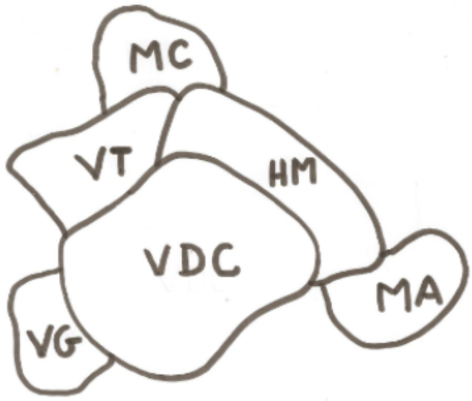
PARTIE A

En Janvier 2012 la mairie de Nouméa décide d'organiser un festival de Hip-Hop. Six équipes sont intéressées par l'événement, toutes de quartiers différents.

On dira que deux quartiers sont ***adjacents*** *s'ils ont une frontière commune. (Ex : Vallée Des Colons et Haut-Magenta sont adjacents).*

Le but de l'exercice est de proposer le nombre minimum de sites nécessaires sachant que deux équipes de quartiers adjacents ne peuvent pas danser sur le même site.

On donne ci-dessous le plan des quartiers engagés dans le festival.



VT : Vallée du Tir
VDC : Vallée des Colons
VG : Vallée du Génie
MC : Montagne coupée
HM : Haut-magenta
MA : Magenta

1. Schématisation du problème :

a. Compléter le schéma de l'**annexe 1** de la page 8 de sorte que tous les quartiers adjacents soient reliés par un segment.

Le schéma ainsi obtenu s'appelle **un graphe.**
Les segments sont appelés les **arêtes** du graphe.
Les points du graphe sont appelés **sommets** du graphe.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.

b. En vous aidant des informations données dans la question précédente, compléter le tableau en **annexe 2** de la page 8.

2. Coloration du graphe :

Colorer un graphe : c'est attribuer une couleur à chaque sommet de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur et que le nombre de couleurs soit minimum.

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra si besoin, reproduire le graphe complété en annexe.

a. Colorer ce graphe en commençant par donner la couleur N°1 au Quartier HM, qui est de degré 4.
Montrer alors que le nombre minimal de couleurs est 3, quelle que soit la coloration réalisée.

b. De la même façon colorer le graphe, en commençant cette fois par donner la couleur N°1 au quartier Montagne coupée (MC), quartier de degré 2. Montrer alors que le nombre de couleurs est alors de 3 ou de 4.

c. Montrer que la coloration du graphe avec une ou deux couleurs est impossible.

d. Déduire de ce qui précède le nombre minimum de sites qui sont nécessaires au festival.

e. Quelle est au final l'information qui permet de colorer le graphe ?

3. Réponse au problème posé

Proposer alors une répartition des équipes sur les différents sites pour que la contrainte soit respectée.

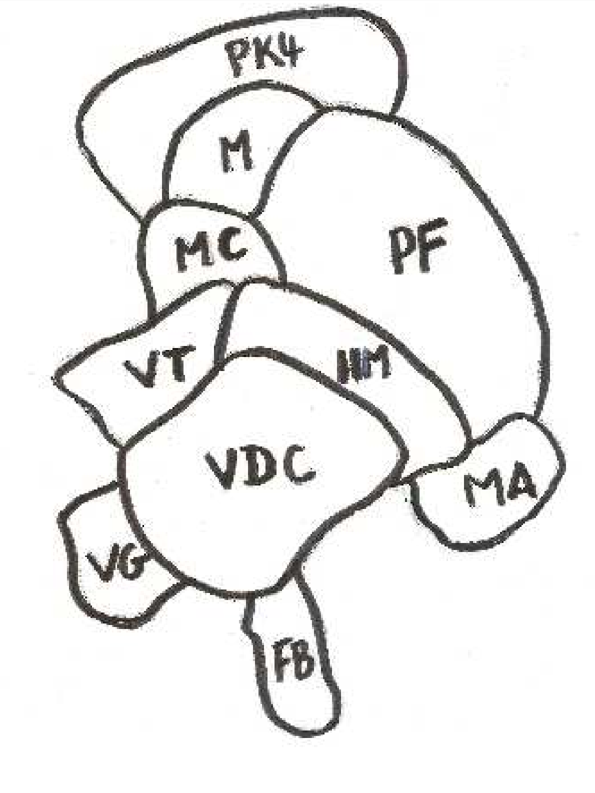
PARTIE B

Vu le succès de l'événement, la mairie a décidé de réitérer l'expérience dans le courant du mois de septembre.

Dix équipes se sont inscrites, donc dix quartiers sont à présent représentés.

De la même façon, on donne le positionnement des quartiers les uns par rapport aux autres.

Les contraintes restent les mêmes.



PK4: Quatrième kilomètre
M : Montravel
PF : Porte de Fer
MA : Magenta
HM : Haut – Magenta
VDC : Vallée des Colons
VG : Vallée du Génie
FB : Faubourg Blanchot
VT : Vallée du Tir
MC : Montagne coupée

1. Dessiner le graphe correspondant à la situation.

2. Compléter les deux premières lignes de l'**annexe 3** de la page 8, de manière à ce que les quartiers soient rangés dans l'ordre décroissant de leur degré.

3. Donner dans ce cas, le nombre minimum de couleurs.

4. En déduire le nombre de sites nécessaires et la répartition des équipes sur ces sites.

EXERCICE 4 : DECOMPOSITION EN FRACTIONS EGYPTIENNES

Un peu d'histoire…

La principale source de connaissances que l'on a sur les mathématiques égyptiennes est un papyrus, appelé papyrus de Rhind, écrit 1650 ans environ avant J-C par le scribe Ahmès.

Déroulé, le papyrus mesure environ 6 mètres de long sur 30 cm de large.

En introduction, Ahmès avait écrit : *« Ceci est la méthode pour accéder à la connaissance de tout ce qui est existant et pour en montrer tous les secrets »…*

Ce papyrus contient en fait 87 problèmes résolus de mathématiques.

Mais avant de prendre connaissance de ses problèmes, les égyptiens devaient avoir en leur possession, différentes tables leur permettant de décomposer des fractions non unitaires en fractions unitaires de dénominateurs tous différents.

Au début du papyrus de Rhind, on trouve une liste de décompositions de fractions $\frac{2}{n}$ appelée table de 2, puis de fractions $\frac{3}{n}$ appelée table de 3,…

De nombreux mathématiciens ont travaillé sur ces tables pour découvrir les règles de leur élaboration.

Pour résoudre cet exercice, vous aurez besoin des définitions mathématiques suivantes :

Une **fraction unitaire** est une fraction de **numérateur égal à 1** et de dénominateur entier strictement positif.

Une **décomposition en fractions égyptiennes** est une **somme de fractions unitaires dont les dénominateurs sont tous différents les uns des autres.**

Dans cet exercice *a, b, n, k* sont des entiers naturels non nuls.

PARTIE A – La table de 2

1. Démontrer que si n est un nombre pair (on posera $n = 2k$), la fraction $\frac{2}{n}$ n'a pas besoin d'être décomposée en fractions égyptiennes car c'est déjà une fraction unitaire.

2. Démontrer que pour tout nombre entier n strictement positif, $\frac{2}{n} = \frac{2}{(n+1)} + \frac{2}{n(n+1)}$

3. a) Démontrer alors que si n est impair (on posera $n = 2k+1$), la fraction $\frac{2}{n} = \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$

b) A l'aide de l'égalité précédente, retrouver les décompositions en fractions égyptiennes des fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$ et $\frac{2}{9}$ qui sont données dans le papyrus de Rhind.

PARTIE B – Décomposition d'une fraction $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ avec $\boldsymbol{a \geq 2}$ et $\mathbf{0} < \boldsymbol{\frac{a}{b}} < \mathbf{1}$ où *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls.

1. Démontrer la relation (R) suivante pour *a, b, k* entiers naturels non nuls :

$$\boxed{k < \frac{b}{a} < k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{k} \quad \text{(R)}}$$

En 1201, Fibonacci (1175-1250) a trouvé l'algorithme ci-dessous qui détermine les fractions unitaires intervenant dans la décomposition en fractions égyptiennes pour une fraction $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ avec $\boldsymbol{a} \geq 2$ et $0 < \boldsymbol{\frac{a}{b}} < 1$.

- Si $a = 1$, la décomposition est terminée.
- Sinon, chercher le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$. On utilisera la relation (R) démontrée à la question 1 en prenant $n = k + 1$.
- Si la différence $\frac{a}{b} - \frac{1}{n}$ est une fraction unitaire, c'est fini. Sinon recommencer avec cette différence.

2. Appliquer cet algorithme pour décomposer en fractions égyptiennes la fraction $\frac{7}{11}$.

3. Recommencer pour la fraction $\frac{55}{84}$.

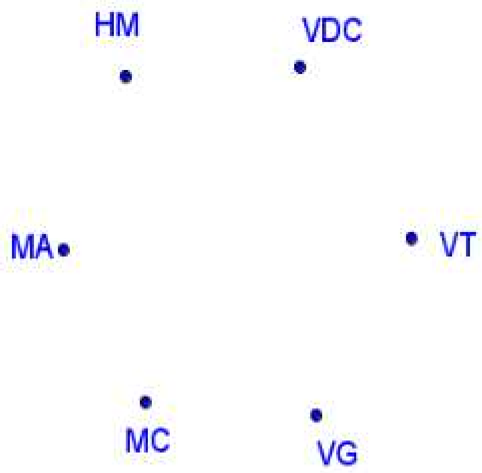
4. Comparer, à l'aide de vos décompositions, les fractions $\frac{7}{11}$ et $\frac{55}{84}$.

Partie C – Problème du Papyrus de Rhind

Comment partager équitablement trois pains en quatre hommes en faisant le moins de découpes possibles ?

ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe 1



Annexe 2

Sommet	MA	VDC	VG	VT	MC	HM
Degré						

Annexe 3

Sommet										
Degré										