Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 10 novembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \quad ; \quad z_B = \overline{z_A} \quad ; \quad z_C = 2z_B \quad ; \quad z_D = 3.$$

   Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.
3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.
4. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$. En déduire la nature du triangle DAC.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On note h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On note r la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle C$'$ l'image de C par h et C$''$ l'image de C$'$ par r.
   Montrer que les droites (AC) et (C$'$C$''$) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x.$$

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   c. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
   On a représenté en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.
   a. Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?

On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.

Aucune justification n'est demandée.

- Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
- Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
- Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

c. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.

Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right)=\ell$.

d. Montrer que $\ell=\alpha$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t\geqslant 0$, $\quad P(X\leqslant t)=\displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est $0,131$.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $0,52$.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a. Quelle est la loi suivie par Y ?
   b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c. Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. **a.** Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.
   b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
2. **a.** Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).
   b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ. Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?
3. **a.** Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.
   Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 4-4t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & t \end{array}\right.$$

   b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.
4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'. Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{9}\right)$.
   Que représente le point H pour le triangle ABC ?
5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Retrouver alors la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

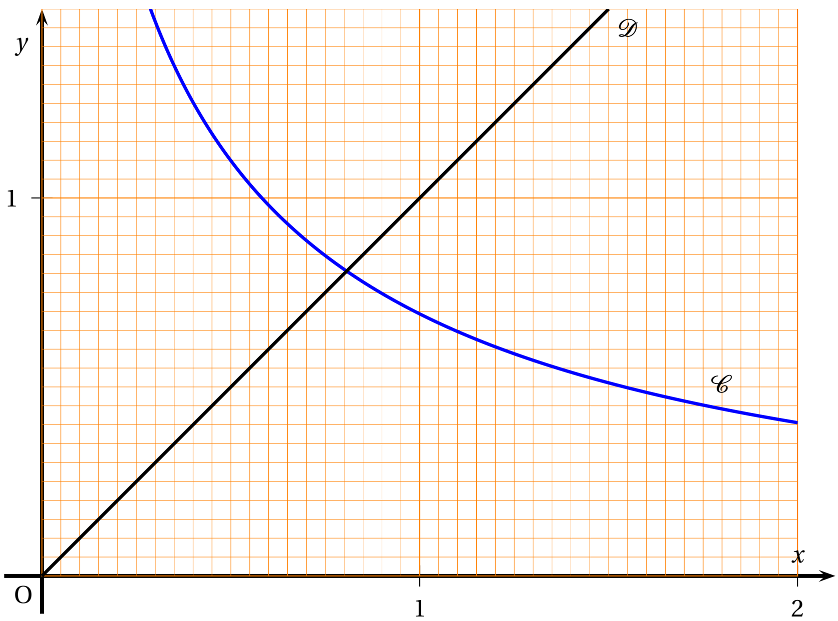
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface S d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

1. **a.** Montrer que si le point $M(x ; y ; z)$ appartient à S alors le point $M'(-x ; -y ; -z)$ appartient aussi à S. Que peut-on en déduire ?
   b. Montrer que la surface S est symétrique par rapport au plan (xOy). On admet de même que la surface S est symétrique par rapport aux plans (xOz) et (yOz).
2. **a.** Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan (xOy).
   Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Soit k un réel non nul. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan d'équation $z = k$. Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$.
4. On considère les points $A\left(2\sqrt{2} ; 0 ; 2\right)$ et $B\left(0 ; 2\sqrt{2} ; -2\right)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. La droite (AB) est-elle contenue dans la surface S ?
5. Identifier parmi les trois figures proposées en **annexe 2** celle qui représente la surface S.
   Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la figure et justifiera la réponse.
6. Soit H la section de la surface S par le plan P d'équation $y = 5$.
   a. Montrer qu'un point $M(x ; y ; z)$ appartient à H si et seulement si $(x - z)(x + z) = -21$ et $y = 5$.
   b. En déduire les coordonnées des points de H dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

ANNEXE 1

Commun à tous les candidats

(À rendre avec la copie)
Exercice 2



ANNEXE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 5

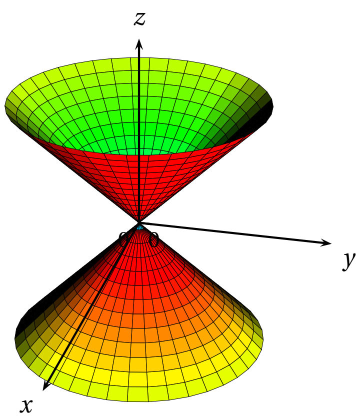


Figure 1

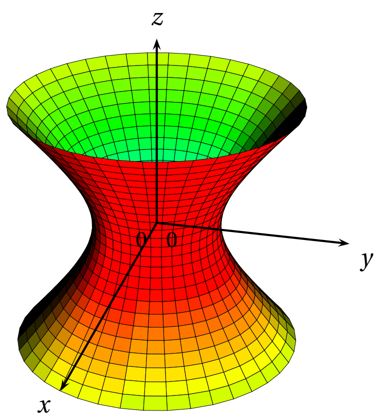


Figure 2

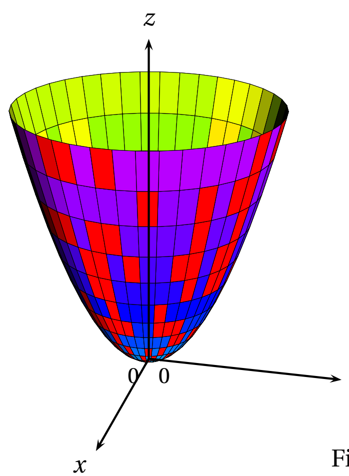


Figure 3