Nombres complexes 4ème partie

IV] Équation du second degré à coefficient réels

L'équation du second degré $a.z^2 + b.z + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation

- si $\Delta > 0$, les deux solutions sont réelles $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, une solution double $z_1 = z_2 = (-b) / 2a$
- si $\Delta < 0$, on peut écrire $\Delta = (i\delta)^2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$,

les deux solutions sont alors des nombres complexes, (conjugués l'un de l'autre) :

$$z_1 = \frac{-b \ -i\delta}{2a} = \frac{-b \ -i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b \ +i\delta}{2a} = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 -3z +4 = 0$
Exercice 2 : Montrer que l'équation $z^3 -9z -28 = 0$ admet une racine réelle.
En déduire une factorisation du polynôme $z^3 -9z -28$ puis la résolution complète de l'équation.
Exercice 3 : Trouver deux nombres complexes de somme 6 et de produit 13.