Nombres complexes $3^{ème}$ partie

III] Notation exponentielle

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire : $z = r\, e^{i\theta}$.
Réciproquement, tout nombre complexe qui s'écrit $z = r\, e^{i\theta}$ ou $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ a pour module r et pour argument $\theta + 2k\pi$.

On a : $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\operatorname{Arg}(e^{i\theta}) = \theta$.

Exercice 1 : Déterminer la forme exponentielle de $1 + i\sqrt{3}$ et de $3 - 3i$

Exercice 2 : Dans le plan complexe, soient A, B et C trois points non alignés d'affixes respectives a, b et c. Démontrer que si $\dfrac{a-b}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : Déterminer l'écriture algébrique de $(-1 + i)^{2012}$

Formules d'EULER : Pour tout nombre réel θ on a :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

alors : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Propriétés : $r\,e^{i\theta} \cdot r'\,e^{i\theta'} = r\,r'\,e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{r\,e^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\theta}$; $\dfrac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$

Formule de MOIVRE : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

L'utilisation des formules d'Euler et de Moivre permet de linéariser les polynômes trigonométriques , c'est à dire que le polynôme trigonométrique s'écrit uniquement avec des termes de la forme

$a\cos(m\theta)$ et $b\sin(n\theta)$ avec a, b, m, n et θ des réels

Exercice 4 : Linéariser $\sin^3(x)$