Nombres complexes 1^{er} partie

I] Forme algébrique

1. Définitions Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$)
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes.
- Le nombre complexe i est tel que $\boxed{i^2 = -1}$
- Un nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $a + bi$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

On dit que a + bi est la forme algébrique du nombre complexe z.

a est la **partie réelle** de z, on note $a = \text{Re}(z)$

b est la **partie imaginaire** de z, on note $b = \text{Im}(z)$.

Les complexes de la forme ***bi*** avec $b \in \mathbb{R}$, sont appelés **imaginaires purs**.

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ est appelé **plan complexe**. Au nombre complexe $z = a + bi$, on peut associer le point M(a ; b) ou le vecteur $\vec{w}$ (a ; b).

- L'axe des **abscisses** est appelé l'axe des **réels**
- L'axe des **ordonnées** est appelé l'axe des **imaginaires**.
- $z = a + bi$ est **l'affixe** de M et de $\vec{w}$.
- M(a ; b) est **l'image** ponctuelle, $\vec{w}$ (a ; b) est l'image vectorielle de $z = a + bi$.
- Le point **Q (-a ; -b)** , symétrique de M par rapport à O a pour affixe **- z** , **opposé de z**.
- Le point **N(a ; -b)** , symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses a pour affixe le nombre complexe appelé **conjugué de z** et noté $\bar{z}$. Si z = a + bi alors $\boxed{\bar{z} = a - bi}$.
- Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, alors
  le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $\boxed{z' - z = (a' - a) + (b' - b)i}$

- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z+z'}{2}$
- le barycentre G de (M ; α) et (M ' ; β) a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha z+\beta z'}{\alpha+\beta}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$.

3. Propriétés dans $\mathbb{C}$: pour $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. : $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$
- Addition : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- Produit : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$
- Inverse : pour z non nul : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{a+bi}\times\dfrac{a-bi}{a-bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$
- Quotient : pour z' non nul : $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{a+bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}$
- Propriétés de i : $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$.
- Propriétés des nombres complexes conjugués :

$\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$;

$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ est un réel positif ou nul.

Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \bar{z}$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\bar{z}$