Lois de Probabilité continues (ou à densité)

I – Introduction

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On dit alors que la variable est **continue**. On s'intéresse à des événements du type : « X est compris entre les réels a et b » soit « $a \leq X \leq b$ ».

Exemples : le temps d'attente à un arrêt de bus, la durée de vie d'un transistor, la distance du point d'impact au centre d'une cible ………… .

Loi de probabilité continue

Définition : *f* est une fonction continue, positive sur un intervalle I = [a ; b] ou I = [a ; +∞[.
Soient c et d deux réels de I tels que c ≤ d.

Dire que *P est la loi de probabilité sur I de densité f* (ou *f* = densité de probabilité) signifie que :

Si I = [a ; b], $P([c;d]) = \int_c^d f(x)\,dx$ **et** $P(I) = \int_a^b f(x)\,dx = 1$.

Si I = [a ; +∞ [, $P([c;d]) = \int_c^d f(x)\,dx$, $P(I) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = 1$ **et**

$P([c;+\infty[) = 1 - \int_a^c f(x)\,dx$.

Remarque : $P([a;b])$ est aussi noté $P(a \leq X \leq b)$ et $P([c;+\infty[)$ est noté $P(X \geq c)$.

Propriétés :

a) La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles.

Ainsi, si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \varnothing$, alors $P(J \cup K) = P(J) + P(K)$.

b) La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I : $P(X = a) = P([a;a]) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

c) On en déduit que, pour tous réels a et b de I, avec $a \leq b$: $P([a;b]) = P([a;b[) = P(]a;b]) = P(]a;b[)$, etc.

d) Si $\overline{[a;b]}$ désigne le complémentaire de $[a;b]$ dans I, alors $P(\overline{[a;b]}) = 1 - P([a;b])$.

e) Si J et K sont des intervalles inclus dans I avec $P(K) \neq 0$, alors $P_K(J) = \dfrac{P(J \cap K)}{P(K)}$.

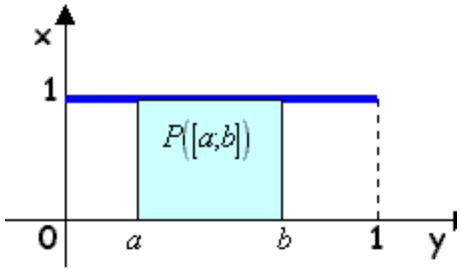
Exercice 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{10^2} e^{-\left(\frac{x}{10}\right)^2} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Démontrer que f est une densité de probabilité.
2. Calculer $P(X \leq t)$ pour $t > 0$.
3. Déterminer la probabilité $P(-5 < X < 10)$
4. Déterminer le réel $t > 0$ tel que $P(X \geq t) = 0{,}8$.

II – Loi Uniforme

<u>Définition</u> :On appelle *<u>loi uniforme sur [0 ; 1]</u>* la loi de probabilité dont la densité *f* est la fonction constante égale à 1 sur [0 ; 1].

<u>Théorème</u> : Si P est la loi uniforme sur $[0;1]$ alors, pour tous réels a et b de $[0;1]$ avec $a \leq b$: on a $P([a;b]) = \int_a^b 1dx = [x]_a^b = b-a$



<u>Propriétés</u> : • Soit P la loi uniforme sur $[0;1]$.

Si I et J sont des sous-intervalles de $[0;1]$ de même amplitude alors $P(\mathrm{I}) = P(\mathrm{J})$.

• Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$alors on admet que E(X)=1/2 et V(X)=1/12

<u>Généralisation</u> : loi uniforme

<u>Th et Def :</u> On appelle **loi uniforme** sur l'intervalle [a ;b] de $\mathbb{R}$, la loi de probabilité continue sur I dont la densité est la fonction constante *f* définie par : *f*(*x*) = $\frac{1}{b-a}$. Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [α ; β] inclus dans [a ;b] est égales à , on a : ***p*** **([α ; β]) =** $\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$

<u>Exercice 2 :</u> On choisit un nombre réel λ au hasard dans [0 ; 4]. Quelle est la densité de probabilité de cette loi uniforme ?

Quelle est la probabilité de l'événement : le nombre choisi appartienne à [1,5 ; 2,8] ?

Déterminer p($[\alpha\,;\beta]$) lorsque $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 4$

<u>Exercice 3</u> : Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. (Il passe à 7h , 7h15 et 7h30).
Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ;30].

Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ?

Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 10 minutes ?