Lois de probabilité discrètes

Terminale S

I – Dénombrement

Exercice 1 : Nombre de codes d'immeubles : 4 chiffres suivis d'une lettre choisie entre A ou B.
Nombre de combinaisons distinctes d'un code de coffre-fort de trois roues crantées de 0 à 9.

1. factorielle

E est un ensemble fini et on note n son cardinal : Card(E) = n.
On appelle Permutation sur E toute *n*-liste des éléments de E.
Par exemple, si E = {a ; b ; c ; d} , une permutation de E est (a ; b ; d ; c) ou (b ; a; d ; c).
En revanche (a ; b; c ; c) n'est pas une permutation de E car l'élément "c" apparait 2 fois.
Une permutation de E est donc un élément de E^n dont lequel chaque élément de E apparait une et une seule fois.
Le nombre de permutations d'un ensemble ayant *n* éléments est : n x (n - 1) x (n - 2) x ... x 2 x 1.

Définition : Si n est un entier strictement positif, on appelle ***factorielle de n*** (ou ***n factorielle***) le nombre noté **n!** égal au produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n.

$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$ Par convention, on posera 0! = 1. 1 ! = 1

Propriétés : $(n+1)! = (n+1)\,n!$ et $\dfrac{(n+p)!}{n!} = (n+p)(n+p-1)(n+p-2)....(n+1)$

Exemple : Dans une salle contenant 20 personnes, on veut faire sortir les personnes les unes après les autres. Ceci correspond à classer les personnes de la première à la vingtième. Il y a donc 20! façons de faire sortir les 20 personnes, c'est à dire 2 432 902 008 176 640 000 façons.

Exercice 2 : Avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ...; 9 , on veut écrire tous les nombres possibles en utlisant tous ces chiffres une et une seule fois. Combien y-a-t-il de nombres possibles ?

2. combinaison

E est un ensemble fini de cardinal n : Card(E) = n.
Pour p entier appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; ... ; n\}$, on note E_p l'ensemble des parties de E ayant exactement p éléments distincts.

a) Définition: On appelle ***Combinaison*** de ***p* éléments pris parmi les *n* éléments** de E tout choix de p éléments de E, sans ordre et sans remise. (= simultanément) Cela correspond donc au choix d'une partie de E ayant p éléments, ou d'un sous-ensemble de E à p éléments. C'est donc un élément de E_p.
Par exemple, si E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, choisir une Combinaison de 2 éléments parmi les 4 éléments de E, c'est choisir un de des ensembles suivants: {1;2} ou {1;3} ou {1;4} ou {2;3} ou {2;4} ou {3;4}

Nombre de Combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments:

Pour p quelconque compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{p}$ « on lit p parmi n » ou C_n^p le nombre de Combinaisons de p éléments parmi les n éléments de E. Ce nombre correspond au cardinal de E_p.

On a $$\binom{n}{p} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\ p!}$$

b) **Propriétés :**

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $(0 \leq p \leq n)$ **ROC**
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $(1 \leq p \leq n)$ **ROC**

c) Exercice 3 : Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

3. Triangle de Pascal

L'idée du triangle de Pascal est de présenter les $\binom{n}{p}$ ou C_n^p sous forme de tableau à double-entrées.

En colonne, les valeurs de p et en ligne les valeurs de n.
Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la p-ème colonne et n-ème ligne est le coefficient $\binom{n}{p}$ ou C_n^p. Or les formules précédentes montrent deux choses.

1: Il y a une symétrie dans ce tableau car $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2: Si on connait les éléments de la ligne (n-1), on connait automatiquement ceux de la ligne n par la formule $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ D'où le Triangle de Pascal:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**		**p-1**	**p**
0	**1**	**0**						
1	**1**	**1**	**0**					
2	**1**	**2**	**1**	**0**				
3	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**			
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
n-1							C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
n								C_n^p

Exercice 4 : Développer $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$. Écrire les résultats en utilisant les nombres $\binom{n}{p}$.

4 Formule du binôme de Newton : ROC

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $b \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Cette formule, valable pour des nombres réels, est bien entendu valable pour des nombres complexes.

Exercice 5 : En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $\left(1+\sqrt{2}\right)^4$ et $(1-2i)^3$

II – Lois de probabilité discrètes

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs. On dit que X est **discrète**.

1. Loi de Bernoulli

Définition :Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S ou 1) et échec (noté $\bar{S}$ ou 0), de probabilités respectives p et 1 – p.

La loi de probabilité est appelée *loi de Bernoulli* de paramètre p.

issue	S (1)	$\bar{S}$ (0)
probabilité	p	1 – p

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de bernoulli est telle que : E(x) = p et V(x) = p(1-p)

Exercice 6 : Une urne contient 70 boules rouges et 30 boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne. Expliquer pourquoi cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès « le tirage d'une boule rouge ». Donner la loi de probabilité.

2. Loi binomiale

Définitions : a) Un *schéma de Bernoulli* est la répétition d'épreuves de Bernoulli **identique**s dans des conditions d'**indépendance**.

b) Un schéma de Bernoulli est constitué de n épreuves indépendantes. X est la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats, associe le nombre de succès.

c) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée *loi binomiale de paramètre n et p*. Cette loi est notée B (n ; p).

Propriétés :a) Pour tout entier k, avec $0 \le k \le n$, $\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$.

b) L'espérance mathématique est $E(X) = np$ et la variance $V(X) = np(1-p)$.(Propriétés admises)

Exercice 7 **:** On reprend l'exercice précédent et on réalise de manière indépendantes 10 expériences. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges obtenues après les 10 expériences. Justifier la loi de probabilité de X. Calculer P(X=7) ; P(X=0) ; P(X ≥2) ; E(X) et interpréter.