Limites de suites et de fonctions

I] Suites

1) Définition : **Une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0.**

Notation : u_n = lire "u indice n" = terme d'indice, ou de rang n = terme général de la suite u.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ = (u_n) = u = suite

Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang, comme par exemple :
$u_n = 1/n$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \sqrt{n-3}$ définie pour $n \geq 3$
Notons que le domaine de définition est nécessairement du type $[n_0 ; +\infty[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$
Une suite peut être définie explicitement par une fonction (exemple $u_n = f(n) = n^2+2n+3$) , ou par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) Démonstration par récurrence :

Soit $\wp$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou un intervalle I de $\mathbb{N}$). Si :
- La propriété est **INITIALISÉE** à un certain rang n_0 (C'est-à-dire : $\wp(n_0)$ est vraie)
- La propriété est **HÉRÉDITAIRE** à partir du rang n_0

(C'est-à-dire : pour tout $n > n_0$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$)
Alors : La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Exercice 1 : Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Sens de variation (monotonie) d'une suite

Définitions : Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :
- La suite (u_n) est **croissante** (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n > n_0$.
- La suite (u_n) est **strictement croissante** (à partir du rang n_0) lorsque $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier $n > n_0$.
- La suite (u_n) est **décroissante** (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier $n > n_0$.
- La suite (u_n) est **strictement décroissante** (à partir du rang n_0) lorsque $u_n > u_{n+1}$ pour tout entier $n > n_0$.
- La suite (u_n) est **monotone** (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0.
- La suite (u_n) est **stationnaire** s'il existe un entier n_0 tel que $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n > n_0$.
- La suite (u_n) est **constante** lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier n du domaine de définition de (u_n).

Méthodes: - On peut comparer directement u_n et u_{n+1} grâce aux propriétés des inégalités.

- On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

- Si la suite u est définie au moyen d'une fonction f par $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f.

- Si tous les termes de la suite u sont strictement positifs, on peut comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Si la suite est définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$ on peut utiliser une démonstration par récurrence.

Exercice 2 : Etudier le sens de variations des suites : $u_n = 2n + \sin(n)$, $v_n = \frac{2^n}{n^2}$ pour $n > 1$

4) Suite majorée, minorée, bornée

Définitions : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** s'il existe un réel M , appelé **majorant** de la suite, tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq M$.
La suite est dite **minorée** s'il existe un réel m, appelé **minorant** de la suite, tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq m$.
Une suite à la fois majorée et minorée, est dite **bornée**.
Méthodes : - manipulation d'inégalités
- Si la suite u est définie au moyen d'une fonction f par $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f.
- Par récurrence.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ et $u_0 = 0$ est bornée par 0 et 3.

II] Limites de suites

Définition suite convergente: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet (ou a) ℓ pour limite , ou encore **converge** (ou tend) vers ℓ, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite **divergente**. (+ ∞ ; - ∞ ; ou pas de limite)

Définition Suite divergente vers + ∞

On dit qu'une suite diverge vers + ∞ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ (où A réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition Suite divergente vers - ∞

On dit qu'une suite diverge vers - ∞ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]-\infty; B[$ (où B réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemples de référence (admis) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$

Les suites sin(n) et cos(n) divergent.

Propriété admise : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+$ et (u_n) la suite définie par **$u_n = f(n)$.**
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$
Propriété (ROC) : Si u est une suite croissante, non majorée, alors u diverge vers + ∞ .
De même : Si u est une suite décroissante, non minorée, alors u diverge vers - ∞ .

Exercice 4 : Etudier la convergence de la suite $u_n = n^2 - 3n - 1$

Exercice 5 : Soit v la suite définie par $v_n = 1 + 1/n$. A partir de quel rang a-t-on $v_n \in]0,99 ; 1,01[$. Que peut -on en déduire?

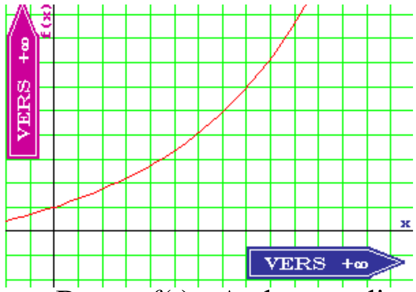
III] Limites de fonctions

Soit *f* une fonction numérique définie sur D_f, de courbe représentative C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Limites en l'infini

a) Limite infinie

Par exemple, considérons la fonction f dont la courbe représentative est ci-contre :



Lorsque ***x*** s'en va vers $+\infty$., ***f(x)*** devient de plus en plus grand. il n'a aucun maximum. On dit alors que ***f(x)*** tend vers $+\infty$.
Ou que la **limite** de la fonction ***f*** lorsque ***x*** tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$
Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Définition : Si pour tout réel A positif, il existe un réel B tel que pour tout x > B on a *f*(*x*)> A alors on dit que *f(x)* tend vers $+\infty$ quand *x* tend vers $+\infty$.

Exercice 6 : On considère la fonction *f* définie sur $[3 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-3}$. En utilisant la définition, démontrer que la fonction *f* a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

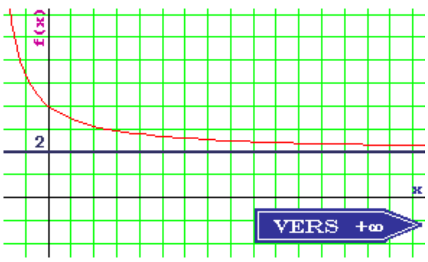
Propriété : La droite (d) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative C_f de la fonction *f* au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0}$

Définition et propriété équivalentes pour une limite en $-\infty$.
Remarque : On étudie la position de la courbe C_f par rapport à la droite (d) en étudiant le signe de *f(x)* – (ax+b). On pourra faire un tableau de signes.

Exercice 7 : On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+10x+22}{x^2+5}$ .Déterminer l'équation de son asymptote oblique.

b) Limite finie

Considérons maintenant la fonction ***f*** dont la courbe représentative est ci-dessous :



Lorsque ***x*** s'en va vers $+\infty$, ***f(x)*** se rapproche de plus en plus de **2**.
On dit alors que ***f(x)*** tend vers **2**, ou que la **limite** de la fonction ***f*** lorsque ***x*** tend vers $+\infty$ est égale à **2**.

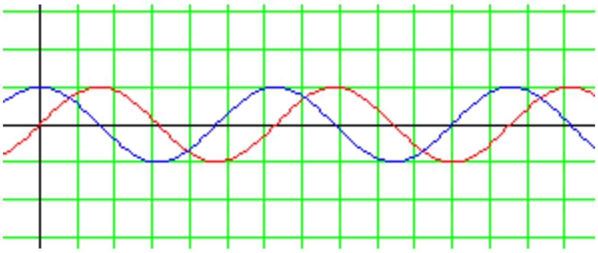
Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

Définition : On dit que *f(x)* tend vers un réel *l* lorsque *x* tend vers $+\infty$**,** si tout intervalle ouvert contenant *l* contient tous les réels *f(x)* pour *x* assez grand.

Propriété : La droite (d) d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative C_f de la fonction *f* au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b}$

Définition et propriété équivalentes pour une limite en $-\infty$.

c) Sans limite !
Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque x tend vers $+\infty$. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



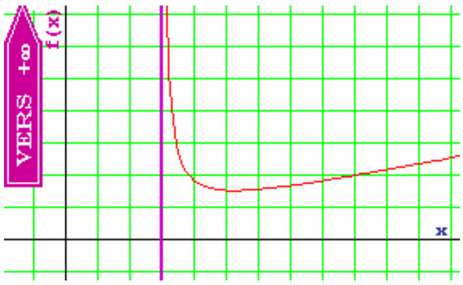
Lorsque x s'en va vers $+\infty$, **sinus** et **cosinus** hésitent quant à l'attitude à adopter. Oscillant à jamais, ils n'ont aucune limite finie ou infinie...

2) Limites en un point

Propriété : Pour tout réel a et pour toute fonction f définie en a , si f admet une limite en a alors elle est unique et égale à $f(a)$. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Limite finie : Dire que f admet une limite L en a , c'est dire que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de L à condition que x soit suffisamment proche de a .
Définition : f admet pour limite L en a si pour tout intervalle I ouvert contenant L, il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que I contient tous les f(x) pour x appartenant à J et à D_f .

Limite infinie :
Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]3;+\infty[$ dont la courbe représentative est ci-contre



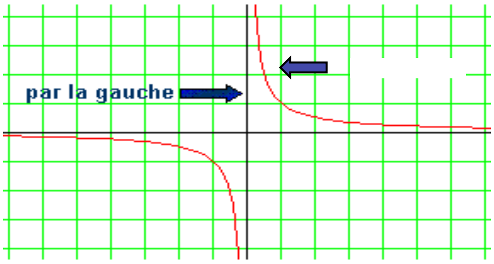
Lorsque x se rapproche de **3**, ***f(x)*** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête. On dit alors que ***f(x)*** tend vers $+\infty$.
Ou que la **limite** de la fonction ***f*** lorsque x tend vers **3** est égale à $+\infty$
Ce que l'on résume par : $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$

Définition : Dire que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a , c'est dire que $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a. Notation $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

Propriété : La droite (d) d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative C_f de la fonction f si et seulement si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$

Exercice 8 : Déterminer les limites en -1 de $g(x) = \dfrac{3x+5}{x+1}$

Limite à gauche et limite à droite.
Exemple : Dans ce qui suit, f désignera la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$



On a alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{1}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{1}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

La fonction *f* n'admet pas de limite en 2.

Propriété admise : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle contenant *a*, mais qui n'est pas définie en *a*, alors, ***f* possède une limite en *a* si et seulement si elle possède une limite finie à gauche et une limite finie à droite et si celles ci sont égales.**

3) Limites des fonctions de référence

Fonction	Ensemble de définition	Limite en -∞	Limite en 0	Limite en +∞
x	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty ; +\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	0	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	N'existe pas	0	$+\infty$
sin(x) cos(x)	$]-\infty ; +\infty[$	N'existe pas	0 1	N'existe pas

4) Opérations sur les limites

Limite d'une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

Limite de *f*	Limite de *g*	Limite de *f* + *g*
L	L'	L + L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Indéterminé**

Limite d'un produit

Limite de *f*	Limite de *g*	Limite de *f* x *g*
L	L'	L x L'
L	∞	∞ (signe à voir)
∞	∞	∞ (signe à voir)
0	∞	**Indéterminé**

Limite d'un quotient

Limite de f	Limite de g	Limite de f/g
L	L'	L / L'
L	∞	0
∞	L	∞ (signe à voir)
∞	∞	**Indéterminé**
1	0	∞
∞	0	∞ (signe à voir)
0	**0**	**Indéterminé**

Les 4 formes indéterminées à retenir sont :

$(+\infty) + (-\infty)$; $0 \times (\pm\infty)$

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

Limite de la composée de deux fonctions.

propriété (admise):

Soient f et g deux fonctions. a, L et L' trois réels ou éventuellement égaux à +/– ∞

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to L} g(x) = L'$ alors $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = L'$

Exemple $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi) = 0$: car $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 2x+\pi = 2\pi$ et $\lim\limits_{x \to 2\pi} \sin(x) = \sin(2\pi) = 0$

Exercice 9 : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9 + \dfrac{1}{x}}$

Limite de la composée d'une suite et d'une fonction.

propriétés (admises):

Lorsque $(u_n)_{n\in}$ converge vers un réel l, si la fonction f est continue en l, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.

Lorsque $(u_n)_{n\in}$ converge vers un réel L, si $\lim\limits_{x \to L} f(x) = +\infty$, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Lorsque $(u_n)_{n\in}$ diverge vers $+\infty$, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 10 : Déterminer la limite de la suite $v_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)$

Théorème des gendarmes. (ROC) A démontrer

Soient f, g et h trois fonctions et L un réel. Si pour tout x appartenant à un intervalle du type $[\alpha;+\infty[$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$

Conséquences : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et si pour x assez grand on a $f(x) < g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ et si pour x assez grand on a $g(x) < h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Conséquences analogues pour des limites en un point ou en - ∞.

Exercice 11 : Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2-\sin x}$

Théorème équivalent pour les suites.