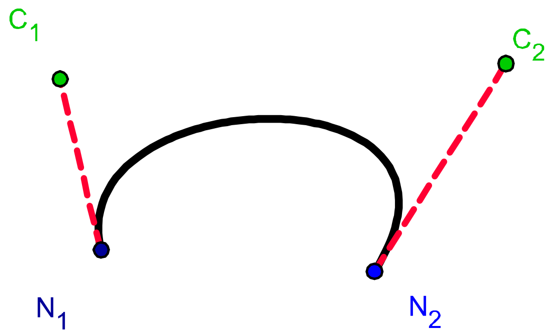
GÉOGÉBRA : LES SPLINES CUBIQUES

Ajouter dans Géogébra un outil pour tracer des courbes en contrôlant les points de passages et leurs tangentes.

1. Présentation des splines cubiques.



Pour dessiner une courbe passant par deux points tout en contrôlant les tangentes aux extrémités, nous allons utiliser les courbes paramétrées de Géogébra. Ensuite, pour rendre cet outil directement accessible dans toutes les nouvelles constructions, nous utiliserons la figure créée pour l'enregistrer comme outil.

Définition mathématique :

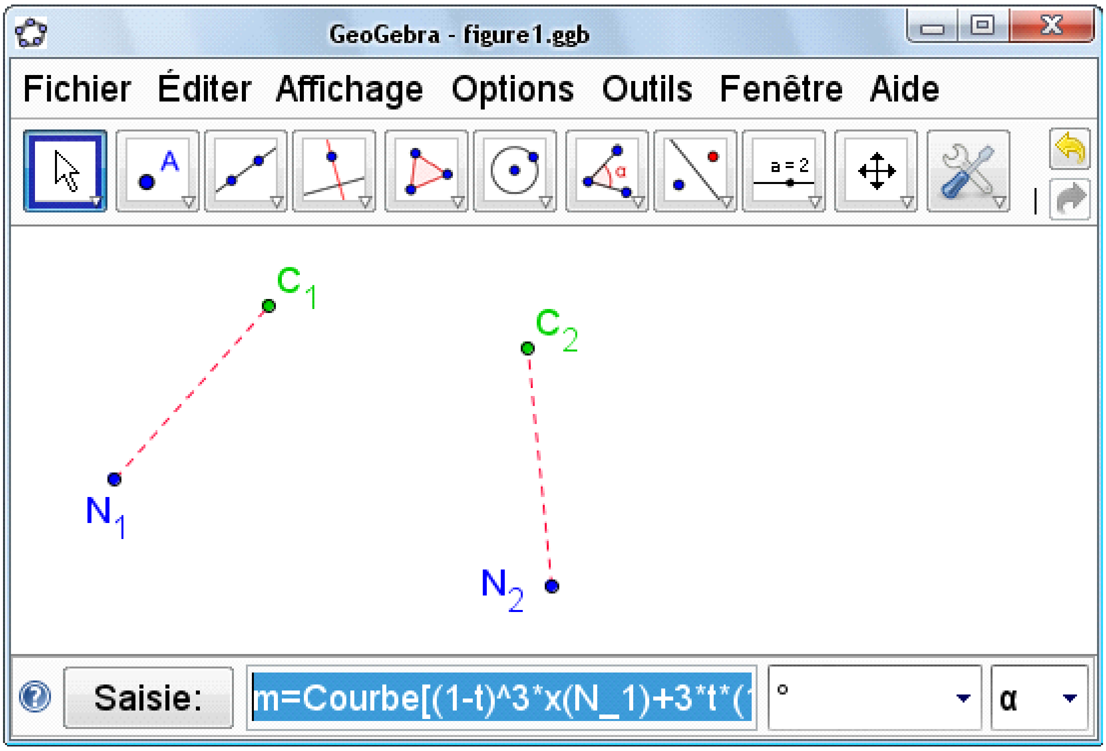
La spline cubique passant par les noeuds N_1 et N_2 avec pour points de contrôles respectifs C_1 et C_2 est la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) = (1-t)^3 N_1 + 3t(1-t)^2 C_1 + 3t^2(1-t) C_2 + t^3 N_2$$
$$0 \leq t \leq 1$$

2. Formulation dans Géogébra.

Dans la barre de saisie de Géogébra, on entre la formule :

m=Courbe[(1-t)^3*x(N_1)+3*t*(1-t)^2*x(C_1)+3*t^2*(1-t)*x(C_2)+t^3*x(N_2),
(1-t)^3*y(N_1)+3*t*(1-t)^2*y(C_1)+3*t^2*(1-t)*y(C_2)+t^3*y(N_2),t,0,1]



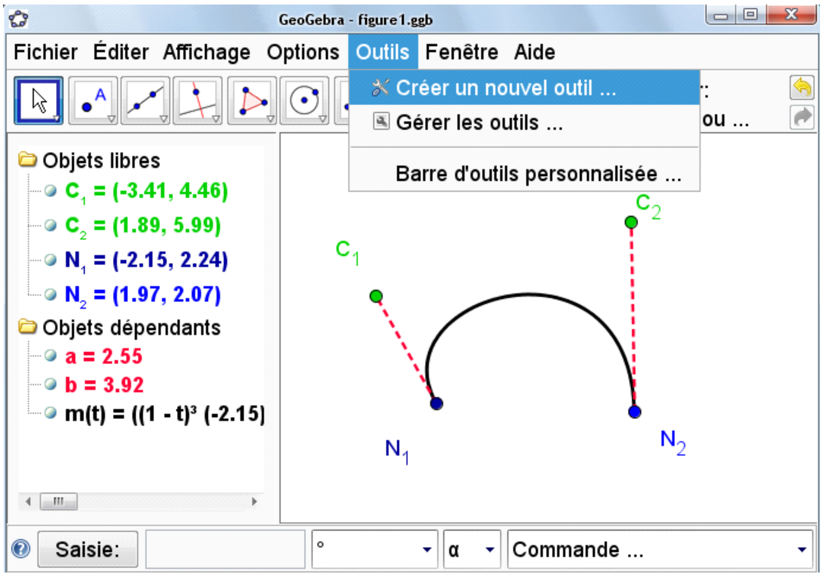
3. Installation de cet outil dans Géogébra.

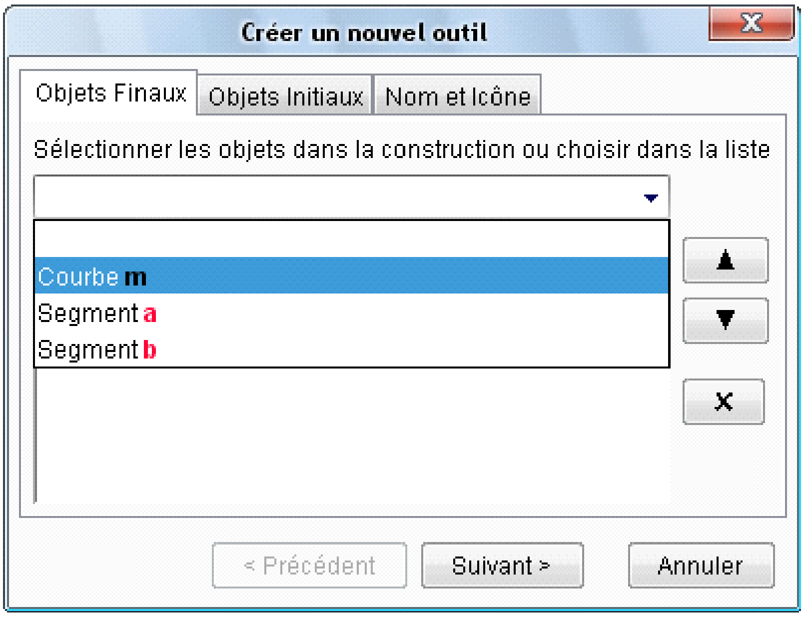
   Un outil Géogébra se présente sous la forme d'un fichier ".ggt". Pour charger un nouvel outil dans Géogébra il suffit d'ouvrir le document ".ggt". Cela n'affectera en rien la construction en cours. L'icône de l'outil viendra se placer à côté de ceux déjà présents et sera immédiatement opérationnel.

   Dans une session Géogébra, ouvrez le fichier "Cspline.ggt" qui accompagne ce document. Sélectionnez ce nouvel outil, puis créez 4 points pour obtenir la courbe associée.

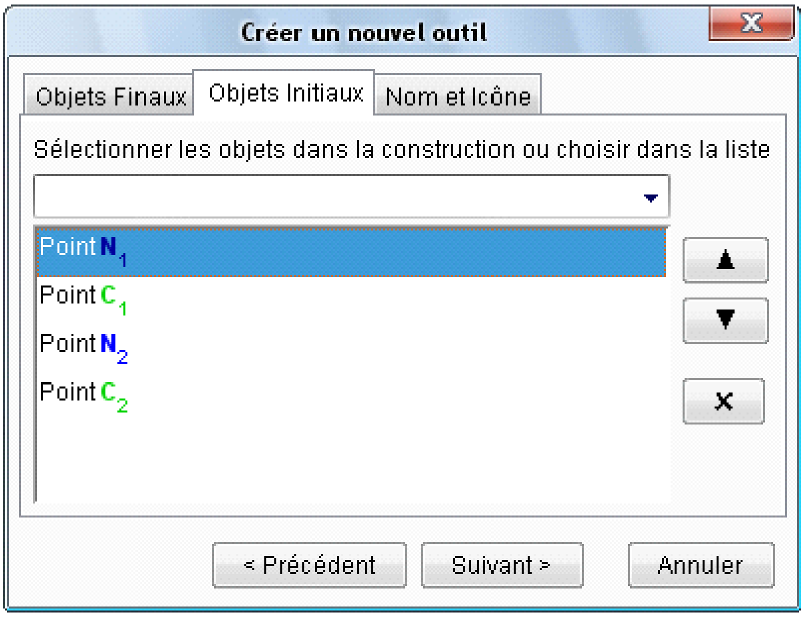
4. Création d'un outil sous Géogébra : l'exemple de Cspline

   Chaque nouvel outil est destiné à construire une figure sur la base d'objets de départ qu'il faut désigner.Prenons l'exemple de la courbe paramétrée précédente. Sa construction se base sur 4 points de départs N_1, C_1, N_2 et C_2 (attention, l'ordre est important). L'objet final est la courbe que l'on vient de réaliser en tapant la formule dans la barre de saisie. Pour créer un nouvel outil, on part de la figure réalisée, puis dans le menu "Outils" choisir "**Créer un nouvel outil**".

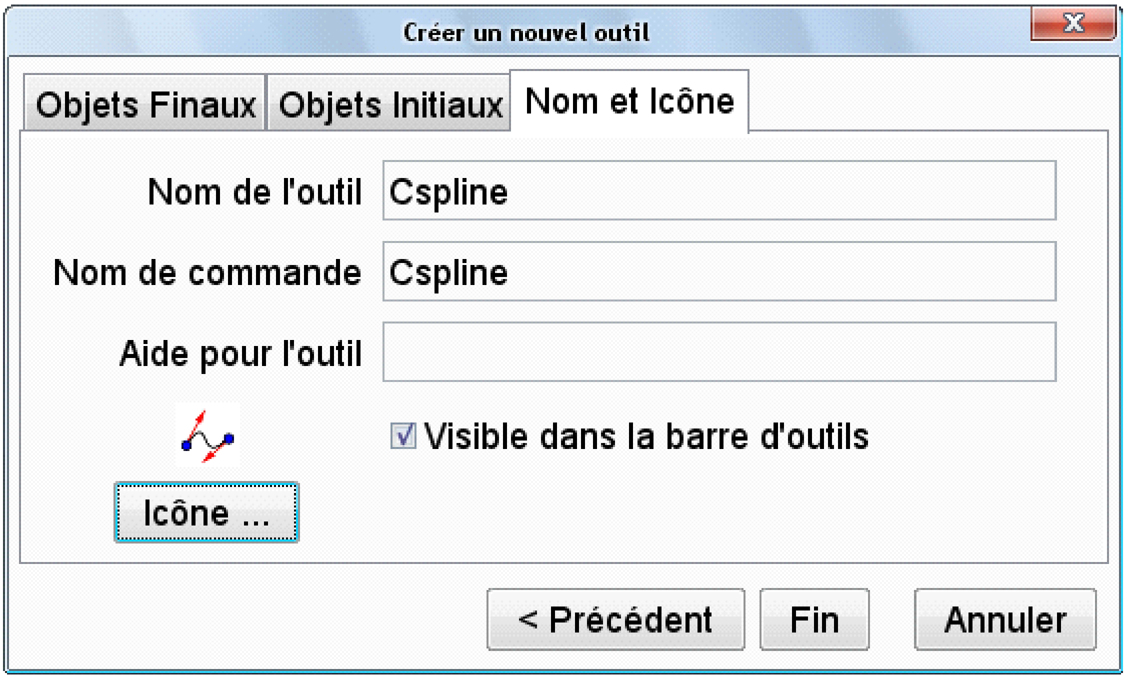


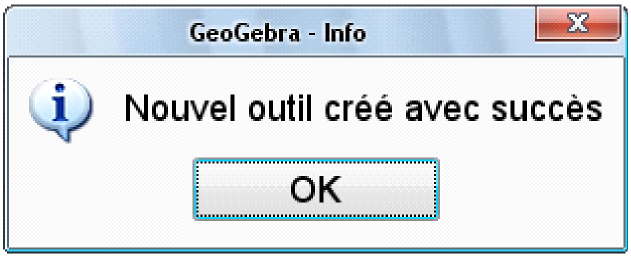


En suivant les étapes de Géogébra, on choisira la courbe dans le menu déroulant des objets finaux (ici, la courbe "m" suffit), puis on sélectionnera les 4 points comme objets de départ.

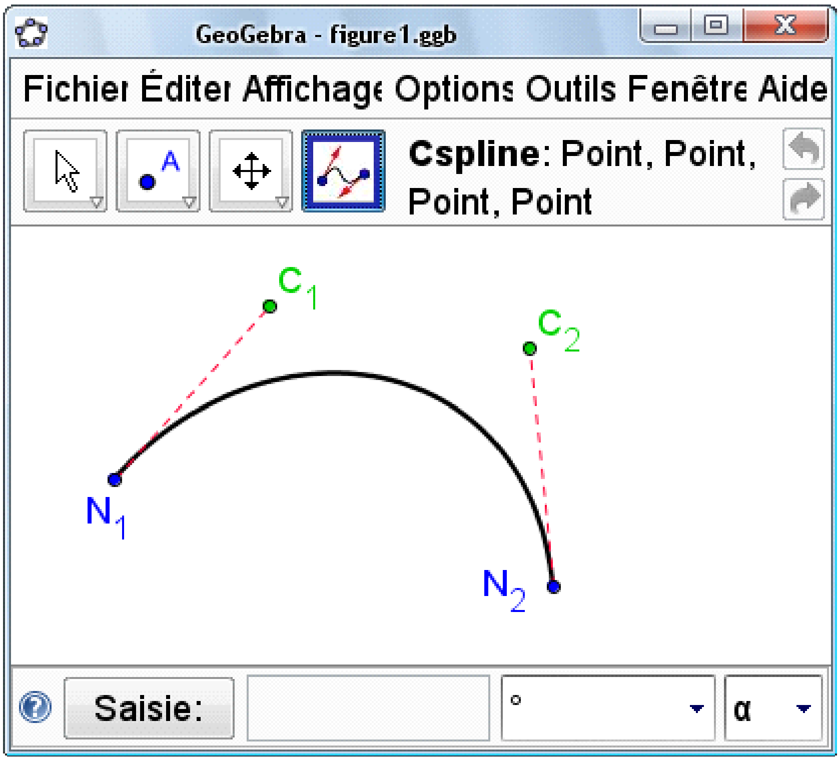


A l'aide des boutons en forme de flêches, il faut les mettre dans l'ordre souhaité, $N_1C_1C_2N_2$. Il ne restera plus qu'à choisir un nom pour l'outil, un nom de commande (pas trop long à taper) et enfin sélectionner "icône" pour choisir l'image qui représentera votre outil, avant de finaliser la création de l'outil.

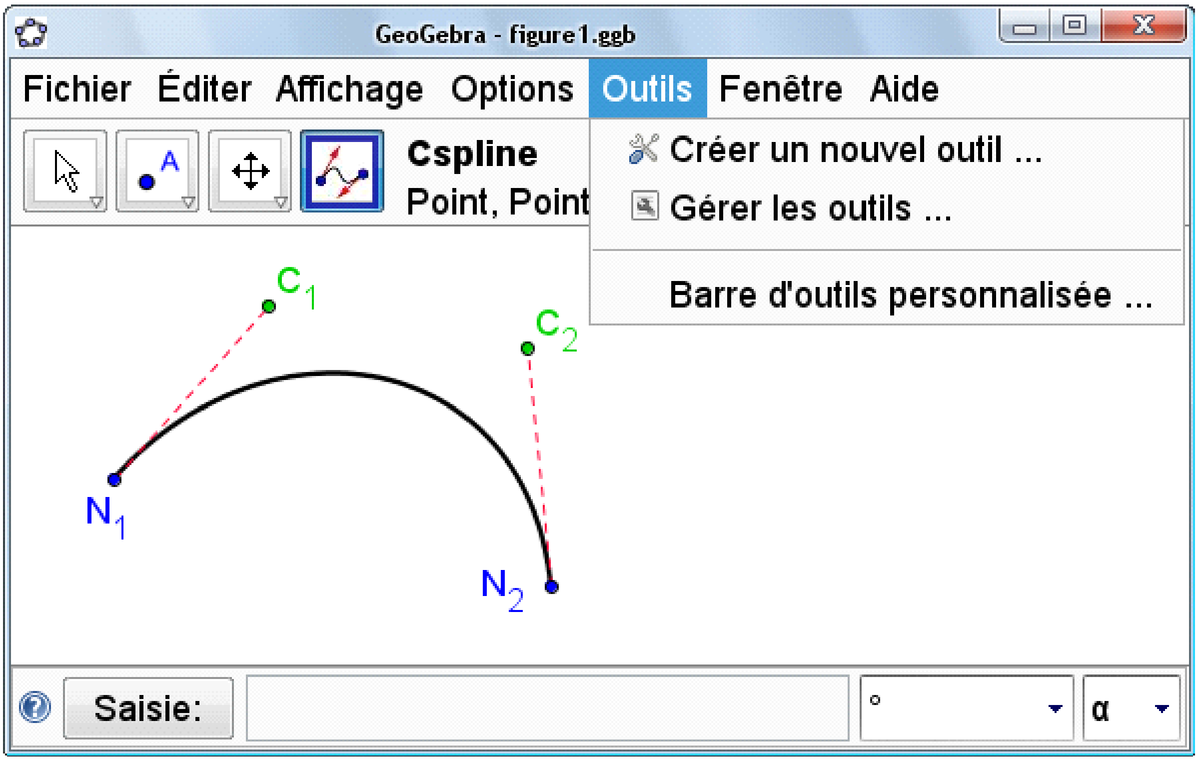


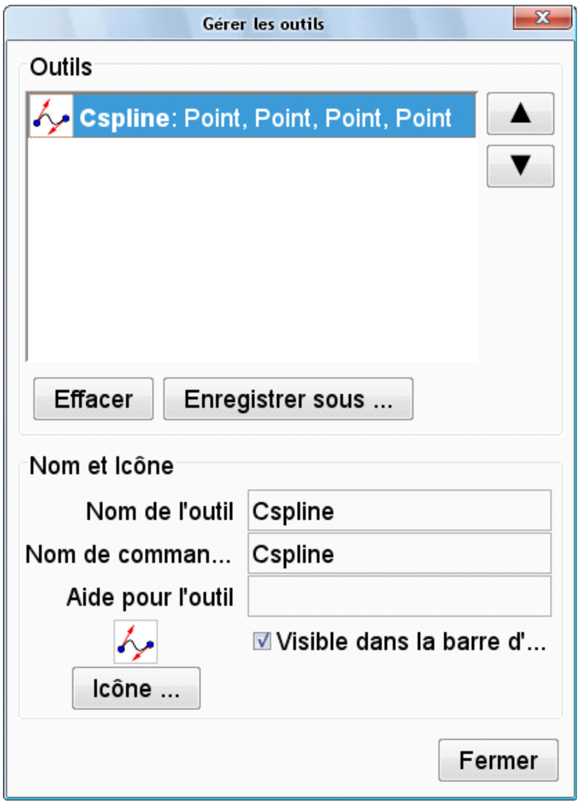


Si tout se passe correctement, un message vient confirmer la réussite de l'opération. L'outil sera alors disponible sous forme d'icône, mais également comme une commande que l'on peut rentrer directement dans la barre de saisie.



A ce stade, l'outil n'est disponible que dans le document dans lequel il a été créé, et sera sauvegardé avec ce document. Pour le mettre à disposition d'autres fichiers, ou le distribuer aux collègues ou aux élèves, il faut l'enregistrer comme outil à partir de son document de création. Pour cela, il faut ouvrir "**Gérer les outils**" dans le menu "Outils".


GeoGebra - figure1.ggb
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
Cspline
Point, Point
Créer un nouvel outil ...
Gérer les outils ...
Barre d'outils personnalisée ...
C1
C2
N1
N2
Saisie:
α


Gérer les outils
Outils
Cspline: Point, Point, Point, Point
Effacer
Enregistrer sous ...
Nom et Icône
Nom de l'outil
Cspline
Nom de comman...
Cspline
Aide pour l'outil
Visible dans la barre d'...
Icône ...
Fermer

En sélectionnant le nouvel outil, on peut alors l'enregistrer dans un fichier avec un suffixe ".ggt", réservé aux outils de Géogébra. Le fichier "Cspline.ggt" peut ainsi être distribué et introduit dans n'importe quelle session Géogébra. Il suffira de l'ouvrir dans le document dans lequel on souhaite l'utiliser.
Enfin, si l'on souhaite disposer de cet outil à chaque nouvelle ouverture de Géogébra, il faut, dans le menu "Options", choisir le sous menu "Enregistrer la configuration".

5. Quelques remarques simples sur les splines cubiques :

a) La continuité en la variable t nous garantit d'obtenir une courbe continue qui démarre au point N_1 pour $t = 0$, et aboutit au point N_2 pour $t = 1$.

b) Cette courbe est un ensemble de barycentres, à poids positifs inférieurs à 1, des 4 points N_1, N_2, C_1 et C_2.
En effet, les coefficients de pondération sont les termes du développement $((1-t)+t)^3$.
La somme des poids sur les 4 points vaut donc

$$(1-t)^3 + 3t\,(1-t)^2 + 3t^2\,(1-t) + t^3 = ((1-t)+t)^3 = 1$$

On est donc certain que la courbe est à l'intérieur du quadrilatère $N_1C_1C_2N_2$.(...dans l'enveloppe convexe constituée par ces 4 points).

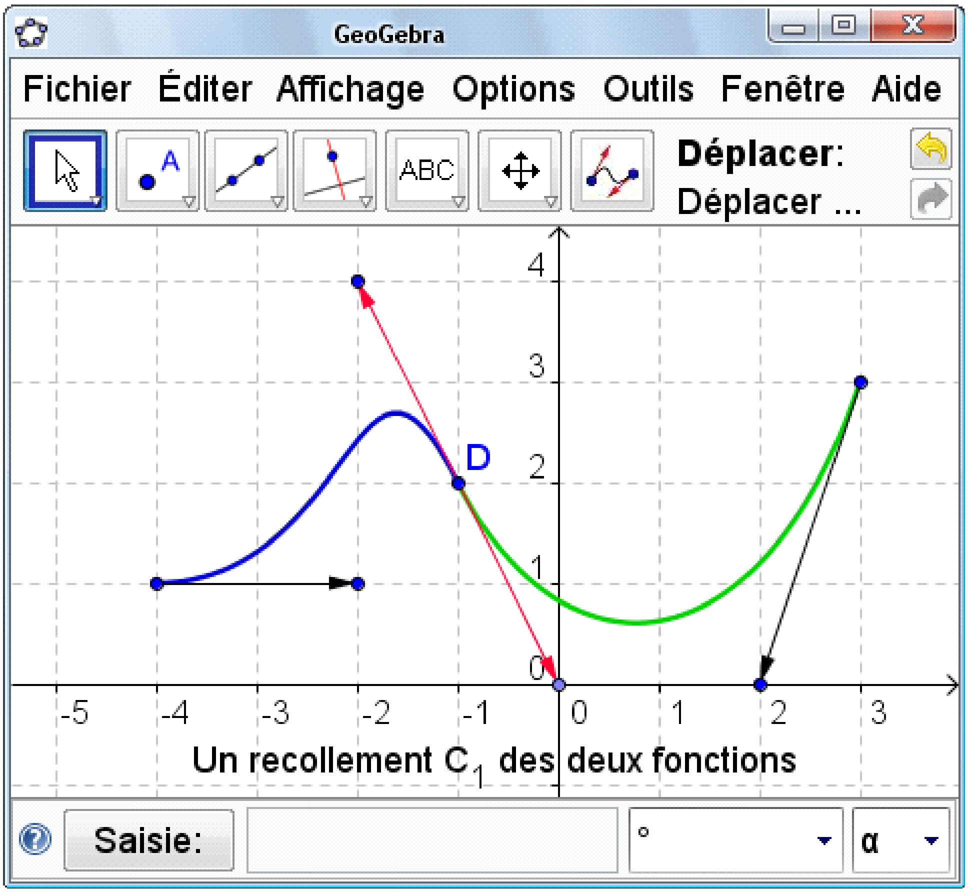
c) Les tangentes aux deux extrémités sont données par les droites (N_1C_1) et (N_2C_2).
En effet, en dérivant en la variable t, on obtient

$$M\,'(0) = 3\,(C_1 - N_1) \text{ et } M\,'(1) = 3\,(N_2 - C_2)\,.$$

d) De manière heuristique, on peut remarquer que le problème inverse, à savoir, obtenir une courbe vérifiant les propriétés précédentes, introduit 4 contraintes ; les passages aux deux points et les deux tangentes. Si les 4 contraintes sont indépendantes (cas général) et si l'on cherche une solution polynomiale, la résolution nécessite une formulation de degré au moins 3. L'unicité de la solution polynomiale de degré 3 vient du fait que le problème est linéaire, avec 4 équations et 4 inconnues. La courbe proposée est donc en ce sens "**la** solution optimale".

6. Utilisations

- Exemple 1 : En joignant plusieurs splines cubiques, en conservant des tangentes à droite et à gauche égales aux noeuds de contacts, on obtient une courbe dont on contrôle des points de passage et leurs tangentes. Ces courbes libres sont très utiles en classe de 2nd pour illustrer les notions d'images et d'antécédents et en 1ère pour la notion de tangente.
  Remarquons que cet outil est disponible dans le mode dessin de Word.



– Exemple 2 : En terminale S, on pourra comparer l'approximation d'une fonction f par une spline cubique et le développement de Taylor à l'ordre 3. On pourra ainsi faire sentir le sens local du développement de Taylor. On pourra introduire ce problème à l'ordre 1, en comparant d'abord l'écart entre la tangente et la courbe représentative de la fonction f avec l'écart entre la corde et la courbe représentative de la fonction f.

– Exemple 3 : En première S, on pourra faire calculer l'expression d'une **fonction** spline cubique, ce qui revient à résoudre un système de la forme,

$$\begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = f(x_1) \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = f(x_2) \\ 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = f'(x_1) \\ 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = f'(x_2) \end{cases}$$

et qui se prête bien à une méthode d'élimination. Ce qui donne de quoi combiner l'analyse et l'algèbre et peut même se prêter à un aspect géométrique si l'on se réfère à la présentation barycentrique des splines cubiques.

7. Liens

- Documentation de Géogébra :
  www.geogebra.org/
- Documentation sur les Splines et courbes de Bézier
  http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_Bézier
  http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/Fiches/Butz10.htm
  www5.ac-lille.fr/~math/classes/analyse/bezierspline/bezier-spline.htm
- Expérimentation d'une épreuve pratique en terminale S. Descriptifs 2007-2008 : Sujet n°24
  http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/textes_officiels/epreuve_pratique/Descriptifs2008.pdf
- Activités proposées :
  http://appli-etna.ac-nantes.fr:8080/peda/disc/math/Ress_Peda/TICE/Docs/02/Courbes%20modelables.htm