Les fonctions puissances — Terminale S

1) Les fonctions x^a avec $x > 0$ et a réel quelconque :

$f(x) = x^a = exp(ln(x^a)) = exp(a ln x) = e^{a\ln x}$; f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = a\,x^{a-1}$.

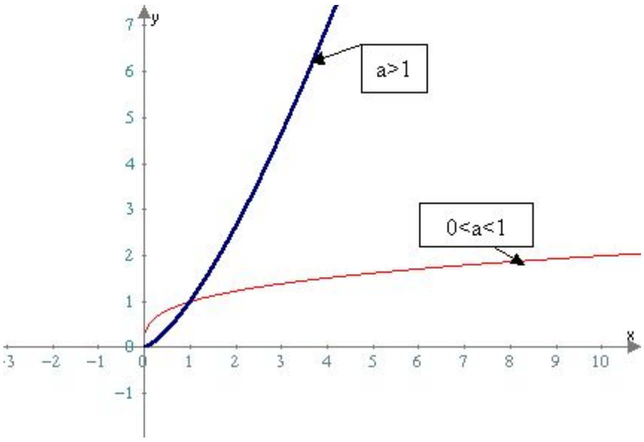
Si $a > 0$

$x > 0$ donc $x^{a-1} > 0$ et $f' > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^a = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{a\ln x} = 0$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{a\ln x} = +\infty$

x	0		$+\infty$
$(x^a)'$		$+$	
x^a	0	$\nearrow$	$+\infty$



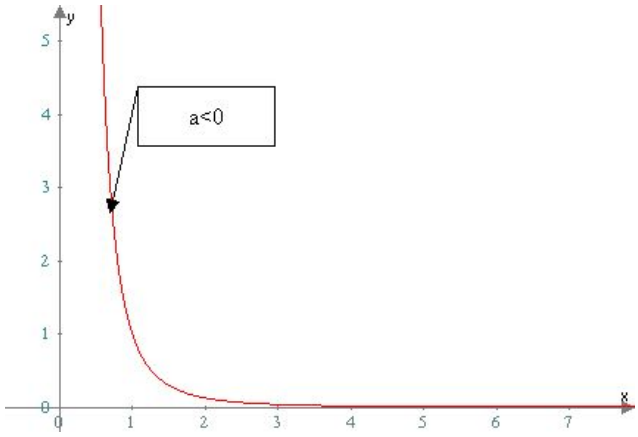
Si $a < 0$

$x > 0$ donc $x^{a-1} > 0$ et $f' < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^a = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{a\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{a\ln x} = 0$

x	0		$+\infty$
$(x^a)'$		$-$	
x^a	$+\infty$	$\searrow$	0



2) Croissance comparée des fonctions puissances, exponentielle et logarithme népérien :

Pour x dans $]0;+\infty[$ et $a > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a e^{-x} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} x^a e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^a \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

Pour retenir ces limites particulières; on peut se dire :

" **En cas de forme indéterminée**, l'Exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme" = " $e^x > x^a > \ln x$ "

3) Cas particulier: Racine n[ième] d'un nombre x positif :

Pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout réel $x \geq 0$, la racine n[ième] de x est le nombre positif , noté $\sqrt[n]{x}$ dont la puissance n[ième] vaut x .

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \quad \text{et} \quad y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$