# Les fonctions logarithmes



Le mot **LOGARITHME** vient du grec ***logos*** : raison ou proportion et de ***arithmos*** : nombre. Il a été utilisé pour la première fois dans un livre de John Napier en 1614 (*Description des merveilleuses règles des Logarithmes*).

## I ] La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, elle prend ses valeurs dans $]0\,;+\infty[$. Donc, pour tout $m$ appartenant à $]0\,;+\infty[$ , le théorème de la valeur intermédiaire s'applique : Pour tout $m$ appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ , il existe un unique réel $\alpha$ tel que : $e^{\alpha} = m$

On note $\alpha = ln\,(m)$. On dit que $\alpha$ est le logarithme népérien de $m$.

1) **Définition et propriété:** Soit $a$ un nombre réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de $a$ ( noté $ln(a)$ ou $ln\ a$) l'unique réel solution de l'équation $exp(x)=a$.

**Définition :** On appelle fonction logarithme népérien, la fonction noté $ln$, qui a tout réel de $]0;+\infty[$ associe le nombre $ln(x)$.

Conséquences : $ln(1) = 0$ ; $ln\ e = 1$

Pour tout $x$ réel > 0, et pour tout réel $y$ on a : $y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$ Et $exp(ln x)=x$ ; $ln(e^y)=y$

Les fonctions $exp$ et $ln$ sont des bijections réciproques. Alors les graphes des fonctions $exp$ et $ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ .

Exercice 1 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions $f(x) = ln(3x-5) + ln(2x+3)$ et $g(x) = ln(6x^2-x-15)$

2) **Propriété** : La fonction $ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ est sa dérivée est $1/x$. (donc la fonction $ln$ est continue sur $]0;+\infty[$.

3) **Relation fonctionnelle et conséquences** : Pour tout $a$ et $b$ de $]0;+\infty[$, et pour tout n de $\mathbb{Z}$ :

**ROC** : $ln\,(ab) = ln\ a + ln\ b$ alors $ln\,\frac{1}{b} = -\,ln\ b$ ; $ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln\,a-ln\,b$ ; $ln\,(a^n) = n\,(ln\ a)$ ;

$ln\,(\sqrt{a}\,) = (1/2)\ ln\ a$

Exercice 2 : Les fonctions $f$ et $g$ de l'exercice 1 sont-elles égales ?

Exercice 3 : Ecrire $ln(32) + ln(8)$ en fonction de $ln(2)$.

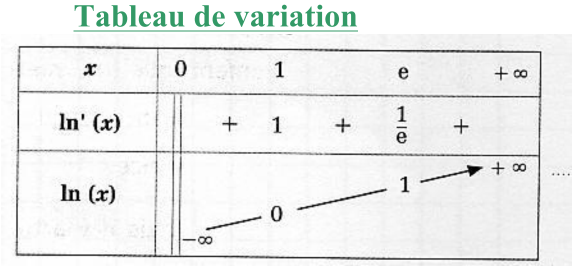
4) **Etude de la courbe** : $f(x) = ln\ x$ ; $D_f = \;]0;+\infty[$

Dérivée et variation : $f'(x) = 1/x > 0$ donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc pour $\boxed{0<x<1 \quad ln\ x < 0 \quad \text{et} \quad \text{pour } x>1 \quad ln\ x > 0}$ , et pour $a$ et $b$ nombres strictement positifs $a = b \Leftrightarrow ln\ a = ln\ b$ et $a < b \Leftrightarrow ln\ a < ln\ b$

Etude des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} ln\,x=-\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe.

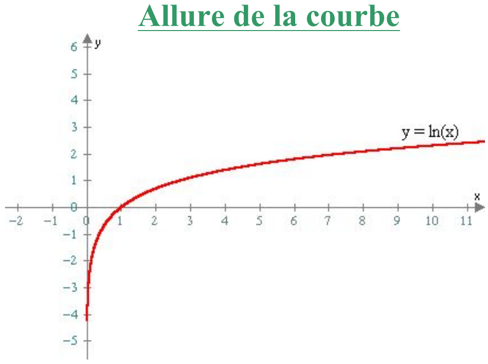
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x}=0$ ; $\lim\limits_{x\to 0} x\,ln\,x=0$ ;

**Tableau de variation**



| $x$ | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| ln' $(x)$ | \|\| | + 1 + | $\frac{1}{e}$ | + |
| ln $(x)$ | \|\| $-\infty$ | 0 ↗ | 1 ↗ | $+\infty$ |

**Allure de la courbe**



5) **Fonction composée** : Soit $u$ une fonction positive sur un intervalle I alors

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et le signe de $(\ln(u(x)))'$ est celui de $u'(x)$. ( car $u(x) > 0$)

Exemple : $(\ln(3x-5))' = \dfrac{3}{3x-5}$ sur l'intervalle $\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$

Application : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc pour h proche de 0 , on a $\ln(1+h) \approx h$ (approximation affine de $\ln$ en 1)

Exercice 4 : déterminer la dérivée de la fonction $h(x) = \ln(e^{2x} + 1)$

6) **Résolution d'équations ou d'inéquations avec des ln :**

a. Rechercher l'ensemble de définition D de l'équation . ( si on a $\ln(u(x))$ ,il faut que $u(x) > 0$)
b. Transformer l'équation ou l'inéquation pour obtenir $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $<0$ ou $>0$.
c. Résoudre l'équation ou inéquation $u(x)=v(x)$ ou $u(x) < v(x)$ ou $u(x) > v(x)$
d. Parmi les réponses trouvées, conserver les solutions appartenant à D .

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\ln(x+5) + \ln(x-2) = \ln 8$ et $\ln(x-3) - \ln(x-1) < 2 \ln 3$

7) **Résolution d'équations ou d'inéquations avec des $(\ln x)^2$ ou $(\ln x)^3$ ….. :**

a. Rechercher l'ensemble de définition D de l'équation . ( si on a $\ln(u(x))$ ,il faut que $u(x) > 0$ )
b. Poser le changement de variable $X = \ln(u(x))$
c. Résoudre l'équation ou inéquation avec les X.
d. En déduire les solutions pour $x$ , appartenant à D .

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$

## II ] Les autres fonctions Logarithmes

1) **Définition 2** : Pour tout réel $a$ strictement positif et différent de 1, on appelle ***logarithme de base a*** la fonction $\log_a$ définie pour tout $x$ strictement positif par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Remarques: on a alors $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$ ; le logarithme de base e est le logarithme népérien.

Propriétés : pour tout $x > 0$ : $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$ donc $\log_a(a^n) = n$

Pour tout $x > 0$ et $y > 0$ $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2) **Définition 3** : On appelle ***fonction logarithme décimal***, la fonction notée $\log$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriétés : $\log(10) = 1$ , $\log 1 = 0$ ; la fonction $\log$ est définie , dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ ( car $\ln(10) > 0$).

Pour $a$, $b$ réels strictement positifs et p entier quelconque on a :

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ ;
$\log(a^p) = p \log(a)$ ; $\log(10^p) = p$