2nd

Fonctions 1

Objectifs : *IR, les intervalles.*
Traduire le lien entre deux quantités par une formule.
Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule :
_ identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;
_ déterminer l'image d'un nombre ; Par le calcul et graphiquement.
_ rechercher des antécédents d'un nombre graphiquement.
Ensemble de définition, courbes, tableau de valeurs.
Résoudre graphiquement des équations du type : f(x) = k ; f(x)<k , f(x) = g(x) , f(x)<g(x)

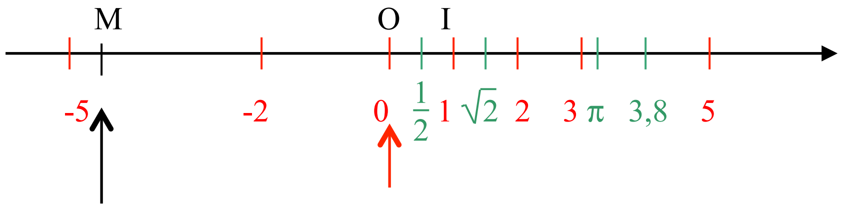
1) a) Les nombres réels :

Il existe des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles IN, $\mathbb{Z}$, ID ou $\mathbb{Q}$

On peut ainsi démontrer par exemple que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\frac{-\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$,

Ces nombres sont appelés nombres irrationnels (i.e « qui ne sont pas rationnels »)
Ils appartiennent avec tous les nombres précédents à l 'ensemble des nombres réels qui est noté IR (comme réel)

L'ensemble des nombres réels est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. (c'est à dire munie d'un repère (O ;I)). Cette droite, qui représente alors IR est appelée droite des réels ou droite numérique.



abscisse du point M
dans le repère (O ; I)

zéro est le seul nombre à la
fois positif et négatif

b) Classification des nombres :

Les nombres peuvent être Entiers IN , $\mathbb{Z}$, Décimaux ID , Rationnels $\mathbb{Q}$ ou Réels IR .

<u>Remarque</u> : IN $\subset \mathbb{Z} \subset$ ID $\subset \mathbb{Q} \subset$ IR

<u>Exercice 1</u> : A quel(s) ensemble(s) appartiennent les nombres 3,56 ; 10/50 ; $-6{,}52.10^4$; 5π ?
Montrer que $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ est un nombre entier naturel.

2) Intervalles de $\mathbb{R}$

! ! un intervalle , des intervalles !!

Les intervalles réels sont des parties de $\mathbb{R}$. Ils sont en général notés avec des crochets, des nombres séparés par ; ou des symboles ∞ . Le symbole ∞ n'est pas un nombre réel.

$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$; $\varnothing$ = ensemble vide

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ = ensemble des nombres réels non nuls.

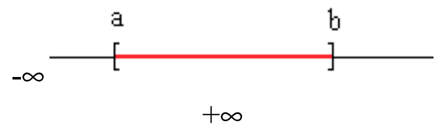
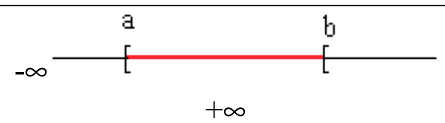
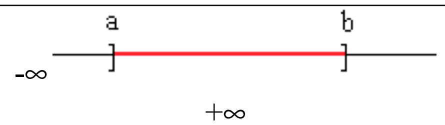
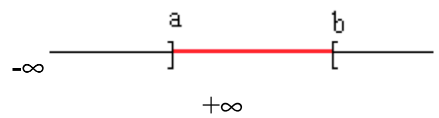
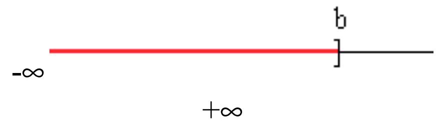
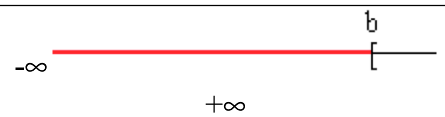
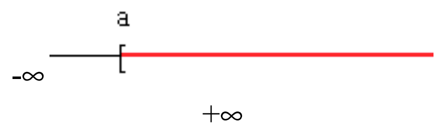
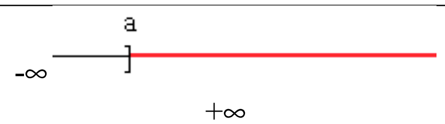
$\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$ = ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$ = ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{R}_- =]-\infty ; 0]$ = ensemble des nombres réels négatifs.

$\mathbb{R}_-^* =]-\infty ; 0[$ = ensemble des nombres réels strictement négatifs.

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que a $<$ b. a et b sont appelés "bornes de l'intervalles".

Intervalle	***Représentation sur la droite réelle***	**Ensemble des réels x tels que**
[a ; b] Fermé a = min b = max		$a \leq x \leq b$
[a ; b [		$a \leq x < b$
] a ; b]		$a < x \leq b$
] a ; b [ouvert		$a < x < b$
$]-\infty\ ; b]$ non borné b = borne supérieure		$x \leq b$
$]-\infty\ ; b[$		$x < b$
$[a ; +\infty[$ a = borne inférieure		$a \leq x$
$]a ; +\infty[$		$a < x$

Remarque : [3 ; -2] ; [1,5,3] ne sont pas des intervalles

La **réunion de deux ou plusieurs intervalles** s'écrit avec le symbole $\cup$, et correspond en français à un **OU**.
Ainsi x est inférieur strictement à 1 ou plus grand que 2 s'écrit $x \in]-\infty\ ; 1[\cup [2 ; +\infty[$

L'intersection de deux ou plusieurs intervalles s'écrit avec le symbole $\cap$, et correspond en français à un **ET**.
Exemple $]-2 ; 1[\cap [-1 ; +\infty[= [-1 ; 1[$

Exercice 2 : Traduire chaque information par des inégalités : $x \in [0 ; 4[$; $x \in]-\infty ; 10[$; $x \in [5 ; +\infty[$

Exercice 3 : Soient $I = [2 ; 5[$ et $J = [3 ; +\infty[$, Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$

3) Fonctions

Une fonction peut être définie par un graphique, un tableau de valeur ou une formule.

a) Définition : Définir une fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est donner un procédé, qui a à chaque élément x de I fait correspondre **un unique nombre** noté $f(x)$.

Notations :

- Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres f, g, h …
- x est une variable, on peut choisir une autre lettre (t pour temps)
- **L'image d'un réel** x de l'intervalle I par la fonction f est noté **$f(x)$** (lire : « f de x »).
- Au lieu d'écrire « f est la fonction qui à x associe $f(x)$ », on peut écrire « $f : x \mapsto f(x)$ ».
- Soit x_0 un réel de l'intervalle I , le nombre réel $f(x_0)$ est l'image de x_0 par f, on dit que **x_0 est un antécédent de $f(x_0)$** par la fonction f.

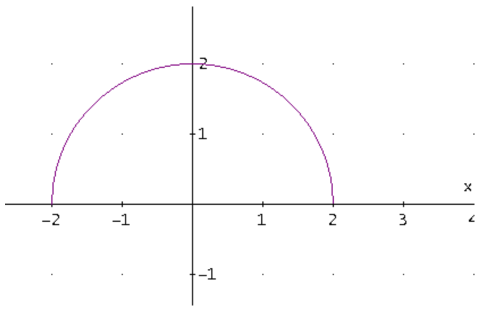
!!!! A retenir !!!
f est une fonction
f(x) est un nombre
Un nombre a une seule image mais peut avoir plusieurs antécédents

Exercice 4 : Calculs d'images et d'antécédents ; à la main, puis à la calculatrice.

b) Ensemble de définition d'une fonction

Définition : On appelle ***Ensemble de Définition*** ou ***domaine de définition*** de la fonction f (souvent noté D_f) l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est défini.

Exercice 5 : Quel est l'ensemble de définition de la fonction définie par la courbe suivante ?



Exercice 6 : Déterminer les ensembles de définitions des fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = 1+\frac{3x+1}{1-2x} \quad ; \quad g(x) = -3\sqrt{5-4x} \quad ; \quad h(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 4$$

Règles : $\frac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$; $\sqrt{A}$ existe si et seulement si $A \geq 0$.

c) Courbe d'une fonction = représentation graphique

On appelle ***courbe représentative*** de f sur l'intervalle I, l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que: $x \in$ I et $y = f(x)$ On dit que **la courbe a pour équation $y = f(x)$.**

Représenter graphiquement une fonction f, c'est tracer sa courbe représentative
C_f = { M(x ; y) / $x \in D_f$, $y = f(x)$}
Dire qu'un point M de coordonnées (a;b) appartient à C_f revient à dire que : a est dans D_f et f(a)=b.
Propriété (admise) : Un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe.

Exercice 7: La courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur [-2;2] a pour équation :
$y = x^3 + x^2 - 3x + 5$.
M est le point de C_f d'abscisse –1. Quelle est son ordonnée ?
Dans un repère (O ; I , J) orthogonal, tracer la courbe sur l'intervalle [-2 ; 2].
Vous pourrez compléter le **tableau de valeurs** suivant en arrondissant au centième :

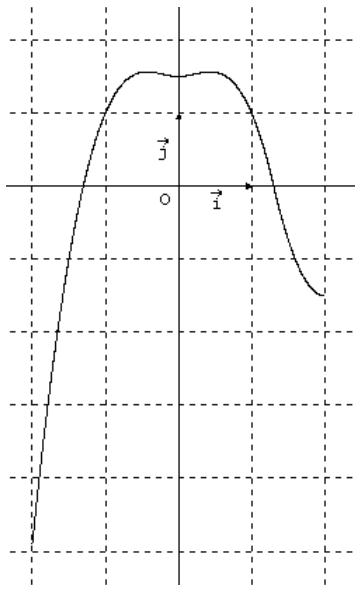
x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = f(x)$									

d) Lecture graphique

Le plan étant rapporté à un repère (O ; I , J), une courbe C_f d'une fonction f étant donnée, on peut lire graphiquement : L'ensemble de définition de la fonction ; l'image d'un nombre x ; l'antécédent ou les antécédents d'un nombre y ; le nombre et les solutions de l'équation $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) ; les solutions d'inéquations du type $f(x) < k$ ou $f(x) > k$; Si on a plusieurs courbes C_f et C_g , les solutions des équations ou inéquations du type $f(x) = g(x)$, ou $f(x) < g(x)$ …
Remarque : La lecture graphique ne donne en général qu'une valeur approchée du résultat cherché.

○ Recherche d'image :

f est une fonction définie sur D_f, C_f est la représentation graphique de f, a est un élément de D_f.
Si A est le point de C_f d'abscisse a, alors $f(a)$ est l'ordonnée de A.



Exercice 8 : La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f
Quel est son ensemble de définition ?
Lire graphiquement l'image de -1,5 c'est à dire $f(-1,5)$

○ Recherche d'antécédents :

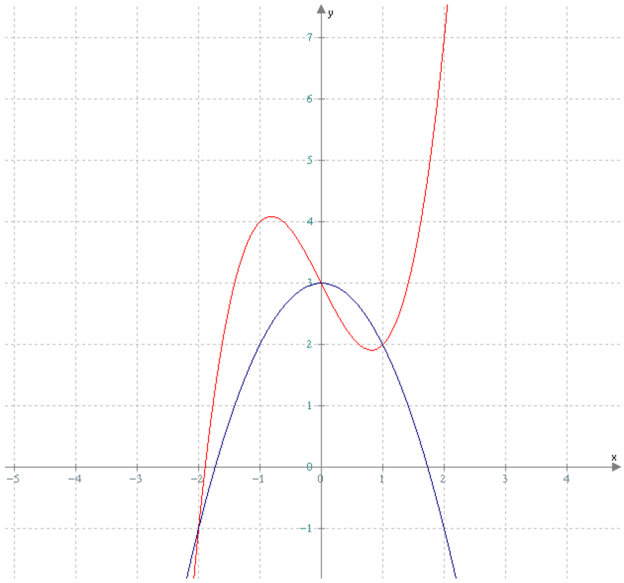
f est une fonction définie sur D_f, C_f est la représentation graphique de f, k est un réel.
(d) est la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; k).
1er cas : (d) ne rencontre pas C_f : cela signifie que k n'a pas d'antécédent par f dans D_f (ou aucun élément de D_f n'a k pour image par f).
2ème cas : (d) rencontre C_f en A(a ;k). Alors A est sur C donc $f(a) = k$ et a est un antécédent de k par f.
Exercice 9 : Lire graphiquement les antécédents de 1, de 2 par f sur la figure ci-dessus.

○ Résolution d'équations ou d'inéquations

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, c'est chercher les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Le résultat sera noté sous la forme S = { ; }
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$, c'est chercher les abscisses des points pour lesquels la courbe de f est en dessous de la courbe de g. Le résultat sera noté sous la forme d'intervalle.

Exercice 10 : Soient les courbes C_f et C_g . Résoudre graphiquement sur [-2 ; 2]:

$f(x) = 2{,}5$; $g(x) = -0{,}5$; $f(x) = 5$; $f(x) < 5$; $g(x) \geq 0$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$.



: C_f en rouge, C_g en bleu